Министерство образования Белгородской области
Областное государственное автономное профессиональное образовательное учреждение
«Белгородский индустриальный колледж»

Рассмотрено
ЦК «Информатики и ПОВТ»
Протокол заседания № 1
от «31» августа 2022 г.
Председатель цикловой комиссии
________________Третьяк И.Ю.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических работ
по дисциплине
ЕН.01 ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

по специальности
09.02.07 Информационные системы и программирование

Квалификация – разработчик веб и мультимедийных приложений

Разработчик преподаватель:
Сапожникова Галина Васильевна,
ОГАПОУ «Белгородский
индустриальный колледж

Белгород 2022

Содержание

1. Пояснительная записка

1.1. Краткая характеристика дисциплины, ее цели и задачи. Место практических работ в курсе дисциплины

Дисциплина ЕН.01 «Элементы высшей математики» является частью математического и общего естественно-научного учебного цикла ППССЗ базовой подготовки и предназначена для обучающихся по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование. Дисциплина изучается в III, IV семестре. В целом рабочей программой предусмотрено 60 часов на выполнение практических работ, что составляет 43 % от обязательной аудиторной нагрузки, которая составляет 138 часов.

Цель настоящих методических указаний: оказание помощи обучающимся в выполнении практических работ по дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики, качественное выполнение которых поможет обучающимся освоить обязательный минимум содержания дисциплины и подготовиться к промежуточной аттестации в форме экзамена

1.2. Организация и порядок проведения практических работ

Практические работы проводятся после изучения теоретического материала в учебном кабинете математики. Введение практических занятий в учебный процесс служит связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, а так же для получения практических навыков и умений. На практическом занятии задания, выполняются студентом самостоятельно, с применением знаний и умений, усвоенных на предыдущих уроках, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя. Обучающиеся должны иметь методические рекомендации по выполнению практических работ, конспекты лекций, измерительные и чертежные инструменты, средство для вычислений.

1.3 Общие указания по выполнению практических работ

Курс практических работ по дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики предусматривает проведение 30 работ, посвященных изучению:

-элементам линейной алгебры

- основам теории комплексных чисел

-элементам аналитический геометрии

-основам дифференциального и интегрального исчисления функций одной действительной переменной

- основам дифференциального и интегрального исчисления функций двух действительных переменных

Каждый вариант работы состоит из нескольких задач. Обучающийся должен решить задачи по варианту, номер которого укажет преподаватель. При выполнении практических работ надо придерживаться следующих правил:

1. Практическую работу следует выполнять в тетради чернилами синего цвета, оставляя поля.
2. На обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия обучающегося, его инициалы, номер специальности, название дисциплины, номер подгруппы.
3. В заголовке работы должны быть указаны номер практической работы, тема практической работы, номер варианта, на полях указана дата выполнения работы
4. В работу должны быть включены задачи, указанные в практической работе, строго по предложенному варианту.
5. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие.
6. Решение задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые рисунки.
7. После получения проверенной работы, студент должен исправить все отмеченные ошибки, и сделать работу над ошибками

1.4 Критерии оценки результатов выполнения практических работ

Критериями оценки результатов работы обучающихся являются:

– уровень усвоения обучающимся учебного материала;
– умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач;
– сформированность общих и компетенций:

ОК 1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам
ОК 5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста

– обоснованность и четкость изложения материала;
– уровень оформления работы.
– анализ результатов.

Критерии оценивания практической работы

Оценка	Критерии оценивания
5	Работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности проведения, содержит результаты и выводы, все записи, таблицы, рисунки, чертежи, графики выполнены аккуратно. Обучающийся владеет теоретическим материалом, формулирует собственные, самостоятельные, обоснованные, представляет полные и развернутые ответы на дополнительные вопросы.
4	Работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности проведения, содержит результаты и выводы, все записи, таблицы, рисунки, чертежи, графики выполнены аккуратно. Обучающийся владеет теоретическим материалом, допуская незначительные ошибки на дополнительные вопросы.
3	Работа выполнена в полном объеме, содержит результаты и выводы, все записи, таблицы, рисунки, чертежи, графики выполнены аккуратно. Обучающийся владеет теоретическим материалом на минимально допустимом уровне, допуская ошибки на дополнительные вопросы.
2	Работа выполнена не полностью. Студент практически не владеет теоретическим материалом, допускает ошибки при ответе на дополнительные вопросы.

2. Тематическое планирование практических работ

	Наименование тем	**Вид и название работы студента**	**Количество часов на выполнение работы**
Раздел 1	**Элементы линейной алгебры**		**8**
1.1	Матрицы и определители	**Практическая работа №1 «**Вычисление определителей»	2
		Практическая работа №2 «Операции над матрицами»	2
1.2.	Системы линейных уравнений	**Практическая работа №3** «Решение систем линейных уравнений методом Крамера» **Практическая работа №4** «Решение СЛУ методом Гаусса»	4
Раздел 2	**Элементы аналитической геометрии**		**6**
2.1	Операции над векторами	**Практическая работа №5** «Операции над векторами»	2
2.2.	Прямая на плоскости и в пространстве	**Практическая работа №6** «Составление уравнения прямой»	2
2.3.	Кривые второго порядка	**Практическая работа №7 «**Составление уравнений кривых второго порядка»	2
Раздел 3	**Основы теории комплексных чисел**		**4**
3.1	Комплексные числа	**Практическая работа№8** «Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах» **Практическая работа №9** «Переход от алгебраической к показательной форме»	4
Раздел 4	**Основы математического анализа**.		**42**

4.1	Теория пределов и непрерывность	**Практическая работа №10** «Вычисление простых пределов» **Практическая работа №11** «Вычисление пределов с помощью замечательных»	4
4.2	Дифференциальное исчисление функций одной действительной переменной	**Практическая работа №12 «**Вычисление простых производных» **Практическая работа №13 «**Вычисление производной сложной функции» **Практическая работа №14**«Производные и дифференциалы высших порядков» **Практическая работа №15**«Полное исследование функции»	8
4.3.	Интегральное исчисление функции одной действительной переменной	**Практическая работа№16** «Интегрирование функций с помощью таблицы и основных свойств» **Практическая работа №17** Интегрирование заменой переменной и по частям **Практическая работа №18** Интегрирование рациональных выражений **Практическая работа №19** Интегрирование иррациональных функций **Практическая работа №20** Нахождение определенного интеграла с помощью таблицы и основных свойств определенного интеграла **Практическая работа №21** Вычисление определенных интегралов заменой переменной и по частям **Практическая работа №22** Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла	14
4.4.	**Тема 4.4. Дифференциальное исчисление функции**	**Практическая работа №23**: «Вычисление частных производных и дифференциалов функций нескольких переменных **Практическая работа №24** «Вычисление	4

	нескольких переменных	экстремумов функций нескольких переменных»	
4.5.	**Интегральное исчисление функций нескольких переменных**	**Практическая работа №25** «Вычисление двойных интегралов в случае области I и II типа» **Практическая работа №26** «Приложения двойных интегралов»	4
4.6.	**Теория рядов**	**Практическая работа №27** «Исследование числовых рядов на сходимость» **Практическая работа №28** «Исследование знакочередующихся рядов на абсолютную и условную сходимость»	4
4.7.	**Обыкновенные дифференциальные уравнения**	**Практическая работа №29** «Интегрирование дифференциальных уравнений с разделенными переменными» **Практическая работа №30** «Решение дифференциальных уравнений второго порядка»	4
		Итого	**60**

3. Содержание практических работ

Практическая работа №1«Вычисление определителей»

Цель: Освоить методы вычисления определителей второго, третьего и четвёртого порядка.

Теоретические сведения по выполнению практической работы:

Правило 1. Определитель третьего порядка вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Правило 2. (Правило Саррюса)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - (a_3b_2c_1 + a_2b_1c_3 + a_1b_3c_2)$$

Определение. Минором элемента определителя 3-го порядка называется определитель 2-го порядка, получающийся из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит этот элемент.

Минор элемента a_{ij} обозначают M_{ij}. Например, для определителя, рассмотренного в примере (3), минором элемента $a_{23} = 5$ является определитель 2-го порядка $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4$.

Вариант 1

1.Решить определитель второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Найти миноры элементов a_{11} и a_{23}:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -1 & 6 \\ 3 & 7 & -5 & 1 \\ 4 & -2 & 11 & -5 \end{vmatrix}$$

3. Вычислить определитель третьего порядка двумя способами по правилу треугольника и методом разложения по элементам третьей строки:

$$\text{а) }\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

б) **вычислить определитель по формуле и разложить по элементам третьего столбца:**

$$\text{б) }\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

4. Вычислить определитель четвертого порядка и разложить по элементам 3 столбца, разложением по любому столбцу или строке сделать проверку:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

5.Записать определитель третьего порядка и перечислить свойства.

Вариант 2

1. **Решить определитель второго порядка:**

$$\text{а) }\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}; \qquad \text{б) }\begin{vmatrix} -2 & -20 \\ 30 & 10 \end{vmatrix}.$$

2. **Найти миноры элементов a_{24} и a_{41}:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & -5 \\ -6 & 10 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

3. **Вычислить определитель третьего порядка двумя способами: по правилу треугольника и разложить по элементам 2 столбца:**

$$\text{а) }\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix};$$

б) вычислить определитель по формуле и разложить по элементам 3 столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

4. **Вычислить определитель четвертого порядка по элементам третьего столбца:**

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & -5 \\ 9 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

5. **Охарактеризуйте понятие минора и алгебраического дополнения, запишите соответствующие формулы.**

Практическая работа №2 «Операции над матрицами»

Цель: Отработать на практических примерах все основные операции над матрицами

Теоретические сведения по выполнению практической работы:

Матрицей называют систему элементов (чисел, функций и других величин), расположенных в виде прямоугольной таблицы. Эту таблицу обычно заключают в круглые скобки. Например, матрица может иметь вид:

$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \pi & 1 \end{pmatrix}}, \quad \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & \sqrt{2} & 0 \\ 1.5 & 3 & -1 \end{pmatrix}}, \quad \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}, \quad \underset{1\times 1}{(4)}$$

Для краткости матрицу можно обозначать одной заглавной буквой, например, A или B.

В общем виде матрицу размером $m\times n$ записывают так

Числа, составляющие матрицу, называются *элементами матрицы*. Элементы матрицы удобно снабжать двумя индексами a_{ij}: первый указывает номер строки, а второй – номер столбца. Например, a_{23} – элемент стоит во 2-ой строке, 3-м столбце.

Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной*, причём число ее строк или столбцов называется *порядком* матрицы. В приведённых выше примерах квадратными являются вторая матрица – её порядок равен 3, и четвёртая матрица – её порядок 1.

Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется *прямоугольной*. В примерах это первая матрица и третья.

Различаются также матрицы, имеющие только одну строку или один столбец.

Матрица, у которой всего одна строка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$, называется *матрицей – строкой* (или строковой), а матрица, у которой всего один столбец, *матрицей – столбцом*.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается (0), или просто 0. Например,

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Главной диагональю квадратной матрицы назовём диагональ, идущую из левого верхнего в правый нижний угол.

[redacted]

Квадратная матрица, у которой все элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю, называется *треугольной* матрицей.

[redacted].

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме, быть может, стоящих на главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной* матрицей. Например, [redacted] или [redacted].

Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице, называется *единичной* матрицей и обозначается буквой Е. Например, единичная матрица 3-го порядка имеет вид [redacted].

Неопределенной называют матрицу, у которой сумма элементов любой строки и любого столбца равна нулю.

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

Равенство матриц. Две матрицы A и B называются равными, если они имеют одинаковое число строк и столбцов и их соответствующие элементы равны $a_{ij} = b_{ij}$. Так если [redacted] и [redacted], то $A=B$, если $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$ и $a_{22} = b_{22}$.

Транспонирование. Рассмотрим произвольную матрицу A из m строк и n столбцов. Ей можно сопоставить такую матрицу B из n строк и m столбцов, у которой каждая строка является столбцом матрицы A с тем же номером (следовательно, каждый столбец является строкой матрицы A с тем же номером). Итак, если [redacted], то [redacted].

Эту матрицу B называют *транспонированной* матрицей A, а переход от A к B *транспонированием*.

Таким образом, транспонирование – это перемена ролями строк и столбцов матрицы. Матрицу, транспонированную к матрице A, обычно обозначают A^T.

Связь между матрицей A и её транспонированной можно записать в виде [redacted].

Например. Найти матрицу транспонированную данной.

1. [redacted]
2. $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

Сложение матриц. Пусть матрицы A и B состоят из одинакового числа строк и одинакового числа столбцов, т.е. имеют <u>одинаковые размеры</u>. Тогда для того, чтобы сложить матрицы A и B нужно к элементам матрицы A прибавить элементы матрицы B, стоящие на тех же местах. Таким образом, суммой двух матриц A и B называется матрица C, которая определяется по правилу, например,

[redacted]

или

[redacted]

Умножение матрицы на число. Для того чтобы умножить матрицу A на число k нужно каждый элемент матрицы A умножить на это число. Таким образом, произведение матрицы A на число k есть новая матрица, которая определяется по правилу [redacted] или [redacted].

Примеры.

1. [redacted].
2. Найти 2A-B, если [redacted], [redacted].

   [redacted].

3. [redacted]Найти C=–3A+4B.

   Матрицу C найти нельзя, т.к. матрицы A и B имеют разные размеры.

Умножение матриц. Эта операция осуществляется по своеобразному закону. Прежде всего, заметим, что размеры матриц–сомножителей должны быть согласованы. Перемножать можно только те матрицы, у которых число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы (т.е. длина строки первой равна высоте столбца второй). *Произведением* матрицы A не матрицу B называется новая матрица $C=AB$, элементы которой составляются следующим образом:

[redacted].

Таким образом, например, чтобы получить у произведения (т.е. в матрице C) элемент, стоящий в 1-ой строке и 3-м столбце c_{13}, нужно в 1-ой матрице взять 1-ую строку, во 2-ой – 3-й столбец, и затем элементы строки умножить на соответствующие элементы столбца и полученные произведения сложить. И другие элементы матрицы-произведения получаются с помощью аналогичного произведения строк первой матрицы на столбцы второй матрицы.

В общем случае, если мы умножаем матрицу $A = (a_{ij})$ размера $m\times n$ на матрицу $B = (b_{ij})$ размера $n\times p$, то получим матрицу C размера $m\times p$, элементы которой вычисляются следующим образом: элемент c_{ij} получается в результате произведения элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B и их сложения.

Из этого правила следует, что всегда можно перемножать две квадратные матрицы одного порядка, в результате получим квадратную матрицу того же порядка. В частности, квадратную матрицу всегда можно умножить саму на себя, т.е. возвести в квадрат.

Другим важным случаем является умножение матрицы–строки на матрицу–столбец, причём ширина первой должна быть равна высоте второй, в результате получим матрицу первого порядка (т.е. один элемент). Действительно,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{pmatrix}$$

Вариант №1

1. **Найти матрицу C=2(A+B)-4(A-B)+A и транспонировать полученную матрицу.**

A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 11 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

2. **Перечислите виды матриц вам известные, дайте их характеристику и общий вид.**

3. **Найдите произведение матриц.**

а) A= $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

б) A= $\begin{pmatrix} 2 & -7 & 3 \\ 1 & 11 & 2 \\ -5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

4. Выполните элементарные преобразования над матрицами

C=A*B-2A-3B+B*A

A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & 0 \\ -7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5. Найдите обратную матрицу и сделайте проверку

а) A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

б) A = $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант №2

1. **Найти матрицу C=-A+4B-(3B+7A) и транспонировать данную матрицу.**

A = $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 4 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} -1 & -6 & -1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 9 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

2. **Перечислите действия над матрицами и запишите их в общем виде**.

3. **Найдите произведение матриц**

а) A = $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

б) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 9 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

4. Выполните элементарные преобразования над матрицами.

C=A*A-2AB+B*B

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

5. Найдите обратную матрицу и сделайте проверку.

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

б) $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Практическая работа №3«Решение системы линейных уравнений методом Крамера»

Цель: Сформировать навыки решения систем линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными методом Крамера

Теоретические сведения по выполнению практической работы

Система двух линейных уравнений с двумя переменными- это система вида:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_{1,} \\ a_2x + b_2y = c_{2.} \end{cases}$$ *x,y – переменные*

При решении такой системы по формулам Крамера сначала вычисляют главный определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Если главный определитель равен 0, то система или не имеет решений, или имеет бесконечно много решений, выяснить это можно методом Гаусса.

Если главный определитель не равен 0, то система имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

, где ,

Пример. Решить систему уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ 4x + y = 14; \end{cases}$$

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-8) = 3 + 8 = 11;$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 14 & 1 \end{vmatrix} = 5 - (-28) = 5 + 28 = 33; \; x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{33}{11} = 3,$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} = 42 - 20 = 22; \; y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{22}{11} = 2.$$

Ответ: (3;2)

Вариант №1

1. Решить СЛАУ методом Крамера, и сделать проверку.

а) $\begin{cases} 10\mathrm{x} + 5\mathrm{y} = 25 \\ 3\mathrm{x} - 5\mathrm{y} = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4\mathrm{x} + 7\mathrm{y} = 40 \\ -4\mathrm{x} + 9\mathrm{y} = 24 \end{cases}$

2. Решить СЛАУ методом Крамера. Сделать проверку.

а) $\begin{cases} \mathrm{x} + \mathrm{y} + z = 1 \\ x - y = 2 \\ y + z = 3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y - z = 4 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

3. Решите СЛАУ методом Крамера. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$$

4. Какая матрица называется невырожденной вырожденной? Какие вы знаете способы решения СЛУ?

5. Решите СЛАУ методом Крамера

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 4x + y - 3z = -3 \\ 2x - y - 5z = -15 \end{cases}$$

Вариант №2

1. Решить СЛУ методом Крамера и сделать проверку.

а) $\begin{cases} 5x - 2y = 26 \\ 3x + 5y = -3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 8y = -7 \end{cases}$

2. Решить СЛАУ методом Крамера и сделать проверку

$$\begin{cases} x + y = 1 - z \\ x - y = 3 \\ z = 2x \end{cases}$$

3. Решить СЛАУ методом Крамера и сделать проверку.

а) $\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 12 \\ -4x_1 - x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 = 14 \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 = -20 \end{cases}$

4. Охарактеризуйте принципы решения СЛАУ методом Крамера

5. Решите СЛАУ двумя способами методом Крамера

$$\begin{cases} x - y - 5z = -2 \\ 5x + y + 3z = 12 \\ -2x - y - 4z = -5 \end{cases}$$

Практическая работа №4«Решение системы линейных уравнений методом Гаусса»

Цель: Освоить универсальный метод решения систем линейных уравнений на практических примерах

Теоретические сведения по выполнению практической работы

Система линейных уравнений может:

1) Иметь единственное решение.
2) Иметь бесконечно много решений.
3) Не иметь решений (быть *несовместной*).

Метод Гаусса – наиболее мощный и универсальный инструмент для нахождения решения **любой** системы линейных уравнений. Как мы помним, правило Крамеранепригодно в тех случаях, когда система имеет бесконечно много решений или несовместна. А метод последовательного исключения неизвестных **в любом случае** приведет нас к ответу! Заметим, что сам алгоритм метода во всех трёх случаях работает одинаково.

Пример : решим систему из двух линейных уравнений методом Гаусса

[redacted].

На первом этапе нужно записать *расширенную матрицу системы*: [redacted]. Вертикальная черта внутри матрицы не несёт никакого математического смысла – это просто отчеркивание для удобства и оформления.

Замечание:Матрица системы *– это матрица, составленная только из коэффициентов при неизвестных, в данном примере матрица системы:* [redacted].

Расширенная матрица системы *– это та же матрица системы плюс столбец свободных членов, в данном случае:* [redacted]*. Любую из матриц можно для краткости называть просто матрицей.*

После того, как расширенная матрица система записана, с ней необходимо выполнить некоторые действия, которые также называются *элементарными преобразованиями*.

Существуют следующие элементарные преобразования:

1) **Строки** матрицы **можнопереставлять** местами.

2) Строку матрицы можно **умножить (разделить)** на любое число, отличное от нуля.

Рассмотрим нашу матрицу из практического примера: [redacted].

Рассмотрим подробно решение системы:

. Умножаем первую строку на –2: [redacted], и **ко второй строке прибавляем первую строку умноженную на –2**: [redacted]. Теперь первую строку можно разделить «обратно» на –2: [redacted]. [redacted]

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к *ступенчатому виду*:

[redacted]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Цель элементарных преобразований – привести матрицу к ступенчатому виду: . В оформлении задания прямо так и отчеркивают простым карандашом «лестницу», а также обводят кружочками числа, которые располагаются на «ступеньках». Сам термин «ступенчатый вид» не вполне теоретический, в научной и учебной литературе он часто называется *трапециевидный вид* или *треугольный вид*.

В результате элементарных преобразований получена *эквивалентная*исходной система уравнений:

[redacted]

Теперь систему нужно «раскрутить» в обратном направлении – снизу вверх, этот процесс называется *обратным ходом метода Гаусса*.

В нижнем уравнении у нас уже готовый результат: [redacted].

Рассмотрим первое уравнение системы [redacted] и подставим в него уже известное значение «игрек»:

[redacted]

Ответ: [redacted]

Вариант №1

1. Решить СЛАУ методом Гаусса, и сделать проверку.

а) $\begin{cases} 10x + 5y = 25 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x + 7y = 40 \\ -4x + 9y = 24 \end{cases}$

2. Решить СЛАУ методом Гаусса. Сделать проверку.

а) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = 2 \\ y + z = 3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y - z = 4 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

3. Решите СЛАУ методом Гаусса. Сделайте проверку.

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = -6 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$

4. Какая матрица называется невырожденной вырожденной? Какие вы знаете способы решения СЛУ?

5. Решите СЛАУ 2-мя способами методом Крамера и методом Гаусса (если это возможно) .

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 4x + y - 3z = -3 \\ 2x - y - 5z = -15 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -11 \\ -3x_1 + x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$$

Вариант №2

1. Решить СЛУ методом Гаусса и сделать проверку.

а) $\begin{cases} 5x - 2y = 26 \\ 3x + 5y = -3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 8y = -7 \end{cases}$

2. Решить СЛАУ методом Гаусса и сделать проверку

а) $\begin{cases} x + y = 1 - z \\ x - y = 3 \\ z = 2x \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 4 \\ z + x = 6 \end{cases}$

3. Решить СЛАУ методом Гаусса и сделать проверку.

а) $\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 12 \\ -4x_1 - x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 = 14 \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 = -20 \end{cases}$

4. Охарактеризуйте принципы решения СЛАУ методом Гаусса

5. Решите СЛАУ двумя способами методом Крамера и методом Гаусса (если это возможно)

а) $\begin{cases} x - y - 5z = -2 \\ 5x + y + 3z = 12 \\ -2x - y - 4z = -5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -11 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 13 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = -2 \end{cases}$

Практическая работа №5 «Операции над векторами»

Тема: Освоить основные действия над векторами на плоскости и в пространстве.

Теоретические сведения по выполнению практической работы:

Вектором называют направленный отрезок. **Длиной вектора** называется, длина отрезка, изображающего вектор. Два вектора называются **равными**, если равны их длины и одинаковы направления. **Нулевым вектором** называется вектором, у которого начало совпадает с концом. **Единичным вектором** называется вектор, длина которого равна единице. Углом между ненулевыми векторами называется угол между равными им векторами, отложенными от одной точки. Два вектора называются **коллинеарными,** если угол между ними 0^0 или 180^0 .

Два вектора называются **перпендикулярными,** если угол между ними равен 90^0 .

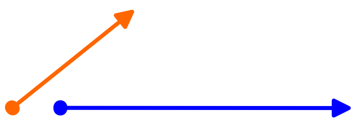
Два вектора называются **противоположными,** если их длины равны, а направления противоположны.

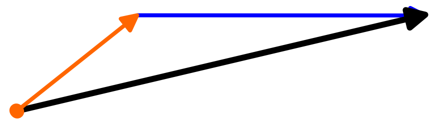
Действия над векторами, заданными направленными отрезками

I. Сложение векторов

1. Правило треугольника

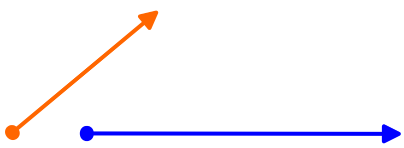
Дано: Построение;

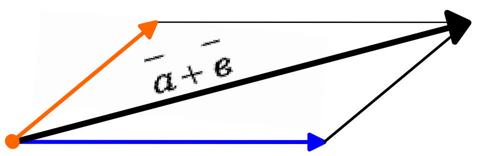




2. Правило параллелограмма

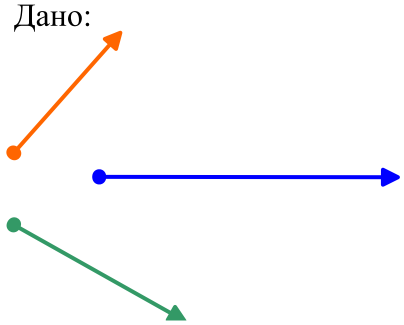
Дано: Построение:

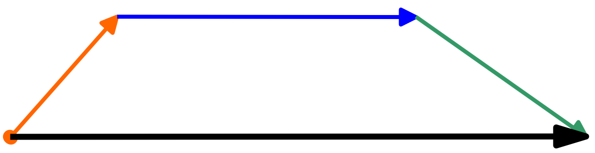




3. Правило многоугольника

Дано: Построение:



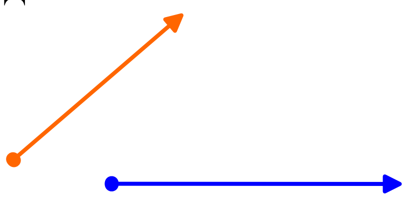


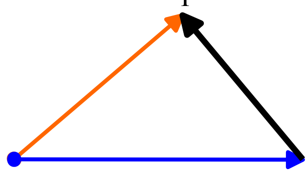
Свойства сложения

1. $\overline{a}+\overline{в}=\overline{в}+\overline{a}$ - переместительное свойство.
2. $(\overline{a}+\overline{в})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{в}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{c})+\overline{в}$ - сочетательное свойство.

II. Вычитание векторов

Дано: Построение:





III. Умножение вектора на число

Произведением вектора, $\overline{a}$ на число λ называется вектор, $\lambda\overline{a}$ у которого:

1) длина равна длине вектора $\overline{a}$, умноженной на модуль числа $|\lambda|$;

2) направление совпадает с вектором $\bar{a}$, если число λ положительное, и противоположно вектору $\bar{a}$, если λ отрицательно.

1. $\left|\lambda \bar{a}\right| = \left|\bar{a}\right| * \left|\lambda\right|$

2. $\lambda \bar{a} \uparrow\uparrow \bar{a}$, если $\lambda > 0$

$\lambda \bar{a} \uparrow\downarrow \bar{a}$, если $\lambda < 0$

Векторы, заданные координатами

1. Чтобы найти **координаты вектора**, надо из координат его конца вычесть координаты начала:

2.Длина вектора вычисляется по формуле

$\left|\bar{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ или $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

3.При сложении векторов их соответствующие координаты складываются, при вычитании – вычитаются, при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

4. Если **векторы равны**, то их координаты равны, и обратно, если координаты векторов равны, то векторы равны.

$$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

5. Если **векторы коллинеарны,** то их координаты пропорциональны, и обратно, если координаты векторов пропорциональны, то векторы коллинеарны.

$$\bar{a} \text{ } колл. \text{ } \bar{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

6) Если **векторы перпендикулярны,** то их скалярное произведение равно нулю, и, обратно, если скалярное произведение векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$$

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\bar{b}(b_1, b_2, b_3)$ называется число $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Теорема. Скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right| \cdot \cos\varphi$$

Следствия из теоремы о скалярном произведении

1) Косинус угла между векторами вычисляется по формуле:

2) Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины:

3) Скалярное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда векторы перпендикулярны:

4) Скалярное произведение векторов равно произведению длины одного из них на проекцию другого: $\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left(\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b}\right)$; $\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|b\right|\cdot\left(\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}\right)$.

Координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении

Координаты середины отрезка

Координаты точки, делящей отрезок в отношении .

Вариант №1

1. Построить в пространстве три точки заданные координатами:

A (1; -5; 6); B (0; 7; -2); C (0; $\frac{1}{3}$; 4), и найти модули векторов AB, BC, AC,

а также координаты середины отрезков AB, BC, AC.

2. Найти скалярное произведение векторов заданных координатами

$\vec{a}$ (0; 4; 9;); $\vec{b}$ (6; 2; 1;) и найти cosα угла между ними.

3. Доказать что векторы коллинеарные

$\vec{a}$ (9; -1; 4); $\vec{b}$ (3; -$\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}$)

4. Найти модуль вектора

$\vec{c}=(2\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b})\vec{a}\vec{b}$, если $\vec{a}$ (1; 2; 3) $\vec{b}$ (-3; 0; 2)

5. Перечислить свойства скалярного произведения векторов в пространстве.

Вариант №2

1. Построить в пространстве три точки заданные координатами:

A (-4; -1; 0); B (-1; 0; 2) ;C (-5; 5; 2) и найти модули векторов AB, BC, AC, а также координаты середины отрезков AB, BC, AC.

2. Найти скалярное произведение векторов заданных координатами

$\vec{a}$ (1; -5; 0); $\vec{b}$ (-5; 1; 0)

и найти cosα угла между ними.

3. Выяснить взаимное расположение векторов

$\vec{a}$ (1; 3; 6); $\vec{b}$ (-1; -3; 2)

4. Найти модуль вектора

$\vec{m}$ =0,25 $\vec{a}\vec{b}$ (-4 $\vec{a}+\vec{b}$) если $\vec{a}$ (1; 3; 2) $\vec{b}$ (-2; 10; -1)

5. Перечислить действия над векторами в пространстве и записать необходимые формулы

Практическая работа №6«Составление уравнения прямой»

Цель: научиться составлять уравнение прямой на плоскости и в пространстве, заданной различными способами

Теоретические сведения по выполнению практической работы:

Уравнения прямой на плоскости.

Если на плоскости произвольно взята декартова система координат, то всякое уравнение первой степени относительно текущих координат x и y, то есть уравнение вида Ax+By+C=0, где A и B одновременно не равны нулю, определяет прямую в этой системе координат. Это <u>общее уравнение прямой.</u>

частные случаи этого уравнения:

	Значение коэффициентов	уравнение прямой	положение прямой
1.	C=0, A≠0,B≠0	ax+by+c=0	проходящей через начало координат
2.	A=0, B≠0,C≠0	y=b, где b=-c/b	параллельно Ox
3.	B=0, A≠0,C≠0	x=a, где a=-c/a	параллельно Oy
4.	A=C=0	y=0	совпадает с осью Ox
5.	B=C=0	x=0	совпадает с осью Oy

Направление любой прямой характеризуется её угловым коэффициент k, который определяется как тангенс угла наклона φ этой прямой к оси Ox, то есть k=tgφ. Исключение составляет прямая, перпендикулярно Ox, которая не имеет углового коэффициента.

<u>Уравнение прямой,</u> имеющей <u>угловой коэффициент k</u> и пересекающей ось Oy в точке, у которой ордината равна b, записывается так:

[redacted].

Угловой коэффициент k прямой, заданной общим уравнением Ax+By+C=0, находящийся как коэффициент при x: [redacted], где B≠0.

Угловой коэффициент k прямой, заданной двумя точками $A(x_a,y_a)$, $B(x_b,y_b)$ вычисляется так:

[redacted]

<u>Каноническое</u> уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ параллельно направляющему вектору q(l,m):

[redacted]

<u>Параметрические</u> уравнения прямой:

[redacted]

$r_0(x_0,y_0)$-радиус вектор точки $M_0(x_0,y_0)$q(l,m)-направляющий вектор прямой.

<u>Уравнение прямой, проходящей через 2</u> данные точки $A(x_a,y_a)$, $B(x_b,y_b)$ имеет вид:

[redacted].

Уравнения прямой в пространстве.

1. <u>Каноническое</u> уравнение прямой, проходящих через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и параллельной вектору s(l,m,n) записывается так:

   [redacted],

M(x,y,z)-текущая точка прямой

S(l,m,n)- направляющий вектор.

2. <u>Параметрические</u> уравнения прямой:

[redacted],

или в векторной форме $r(t)=r_0+qt$, $r_0(x_0,y_0,z_0)$-радиус-вектор некоторой точки, принадлежащей прямой, и $q(l,m,n)$-направляющий вектор прямой.

3. Уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ имеют вид:

[redacted]

4. Общее уравнение прямой записывается так:

[redacted]

A_1, B_1, C_1 не пропорциональны A_2, B_2, C_2.

Угол между 2 прямыми [redacted]

[redacted]

Расстояние d от данной точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямой, заданной уравнением $Ax+By+C=0$ определяется по формуле:

[redacted]

Уравнения прямой, заданной точкой $M_0(x_0,y_0)$ и угловым коэффициентом

[redacted]

Если прямые перпендикулярны, то их угловые коэффициенты

[redacted] Если прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны $k_1=k_2$.

Вариант №1

1. Составить уравнение прямой, проходящей через 2 точки: A(1;4;7) и

B(1,5,-6). Выяснить принадлежат ли точки C(3,1,4), P(2;8;-3) данной прямой?

2. Найти угол между осью абсцисс и прямой, заданной двумя точками:

E(4;-3) и F(5;-6).

3. Треугольник ABC задан координатами своих вершин: A(-3;4), B(-9;6), C(5;2). Составить уравнение средней линии треугольника, параллельной стороне AC, и построить этот треугольник

4. Найти острый угол между прямыми, заданными уравнениями: $\frac{x-2}{11}=\frac{y+5}{7}$ и $\frac{x+2}{4}=\frac{y-4}{-1}$.

5. Перечислите способы задания прямой на плоскости.

Вариант №2

1. Составить уравнение прямой, проходящей через 2 точки: M(0;5;3) и

D(-1;4;6). Принадлежат ли точки A(7;1;2) и C(-4;1;15) данной прямой?

2. Найти тангенс угла наклона прямой к оси OX, заданной двумя точками: K(3;-4), L(-3,2).

3. Вершины треугольника имеют координаты A(7;2;-6), B(11;-3;5) C(-3;4;-2). Составить уравнение медианы треугольника, проведенной из вершины B, и построить этот треугольник

4. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку

A(-7;-4;5) и параллельной вектору $\overset{1}{s}$ (2;-6;9).

5.Перечислите способы задания прямой в пространстве.

Литература:Баврин И.И. с.90-95 №13,14, с. 103

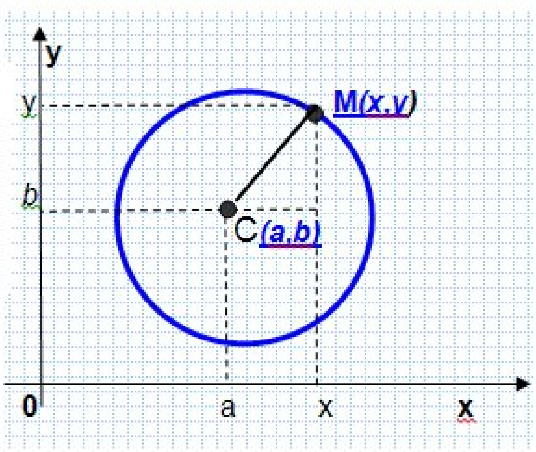
Практическая работа №7 «Составление уравнений кривых второго порядка»

Цель: научиться составлять уравнения основных кривых второго порядка

Теоретические сведения по выполнению практической работы:

Под кривой второго порядка понимают кривую, которую можно в некоторой декартовой систем координат задать уравнением второй степени относительно координат переменной точки этой кривой.

К кривым второго порядка относят кривые, записанные уравнением **Ax^2 +Bxy + Cy^2 + Ex + Дy + F = 0.** В зависимости от значений коэффициентов (вещественные числа) это могут быть окружность, эллипс, гипербола, парабола. Эти кривые были известны с глубокой древности. Все эти кривые суть сечения прямого кругового конуса плоскостями (конические сечения).



Окружность

Простейшей кривой второго порядка является **<u>окружность</u>**:

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ – это каноническое уравнение.

r– радиус, О(а;в)-центр окружности.

Уравнение второй степени относительно текущих координат x и y является уравнением окружности тогда и только тогда, когда , в этом уравнении коэффициенты при квадратах координат равны, а член с произведением координат отсутствует.

Таким образом, уравнение окружности имеет вид:

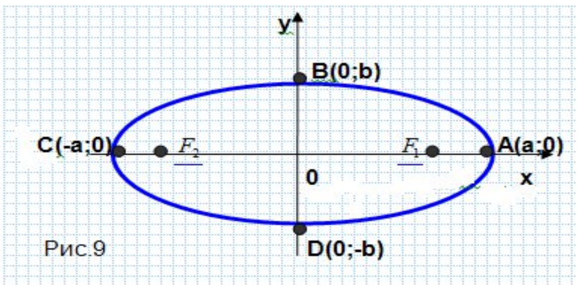
$Ax^2+Ay^2+Cx+Dy+F=0$- это общее уравнение окружности.

Чтобы найти координаты центра и радиуса окружности, заданной общим уравнением, нужно с помощью тождественных преобразований привести уравнение к каноническому виду.

Эллипс

Рассмотрим кривую второго порядка, где *a* и *b*- некоторые положительные числа. Линия, которая в какой-либо декартовой координатной системе может быть задана таким уравнением, называется **эллипсом**, а данное уравнение каноническим уравнением эллипса.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1$$



Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний от нее до двух данных точек(фокусов) – величина постоянная равная 2а и большая расстояния между этими точками

A(-a;0), B(0;b), C(a;0), D(0;-b) …..вершиныэллипса

…………………фокусы эллипса

AC=2a ………………………………большая ось

BD=2b ………………………………малая ось

Таким

Вывед

$c^2=a^2$-в … са, т.к. c<a, то фокусы F_1 и F_2 лежат между вершинами C и A

Расстояния r и r2 любой точки M(x; y) эллипса до фокусов F_1 и F_2 называются фокальными радиусами точки М

[redacted]

Это равенство выражает основное свойство эллипса: сумма расстояний любой точки эллипса до его фокусов есть величина постоянная и равна 2а.

Число ε=с/а называется эксцентриситетом эллипса. Оно характеризует вытянутость эллипса. Чем эксцентриситет ближе к нулю, тем эллипс больше напоминает окружность и наоборот, чем эксцентриситет ближе к единице, тем он более вытянут.

Если в=а, то эллипс превращается в окружность радиусом а .

Таким образом, окружность можно рассматривать как частный случай эллипса, а именно, как эллипс, эксцентриситет которого равен нулю.

Свойства эллипса

1. Эллипс пересекает каждую из осей координат в двух точках.
2. Сумма расстояний от любой точки эллипса до его фокусов есть величина постоянная и равная удвоенной большей полуоси.
3. Эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии.
4. Эллипс имеет центр симметрии.
5. Центр симметрии эллипса называется центром эллипса.
6. Эллипс может быть получен сжатием окружности.

Гипербола. Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных фиксированных точек (фокусов) гиперболы есть одна и та же постоянная величина. Предполагается, что эта постоянная величина не равна нулю и меньше, чем расстояние между фокусами.

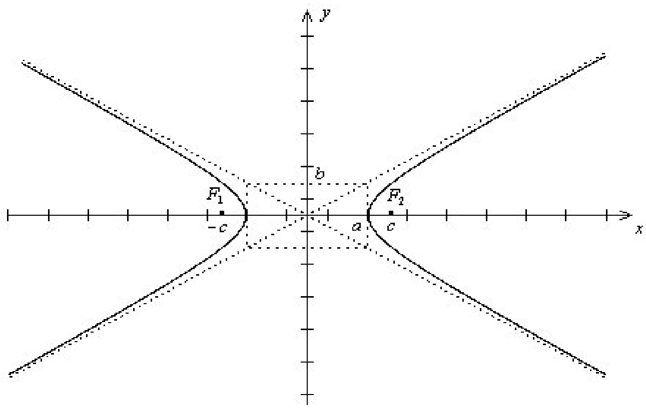


Рис.12.11.Гипербола

Простейшее уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Здесь a - действительная полуось гиперболы, b - мнимая полуось гиперболы.

Если $2c$ - расстояние между фокусами гиперболы, то между a, b и c существует соотношение

$a^2 + b^2 = c^2$.

При $b = a$ гипербола называется равносторонней. Уравнение равносторонней гиперболы имеет вид

$x^2 - y^2 = a^2$.

Фокусы гиперболы лежат на ее действительной оси.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами этой гиперболы к длине ее действительной оси.

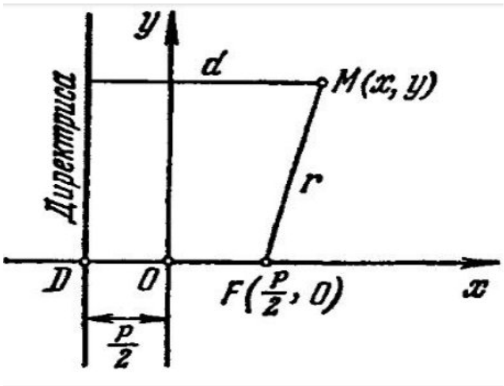
$$e = \frac{c}{a}.$$

Асимптоты гиперболы - две прямые, определяемые уравнениями

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{b}{a}x \\ y = -\dfrac{b}{a}x \end{array}\right\}.$$

Напомним, что асимптотой кривой, имеющей бесконечную ветвь, называется прямая, которая обладает тем свойством, что когда точка по кривой удаляется в бесконечность, ее расстояние до этой прямой стремится к нулю.

Парабола. Параболой называется геометрическое место точек, каждая из которых одинаково удалена от заданной фиксированной точки и от заданной фиксированной прямой. Точка, о которой идет речь в определении, называется фокусом параболы, а прямая - ее директрисой.



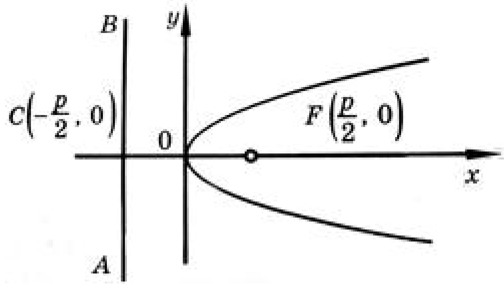
Простейшее уравнение параболы $y^2 = 2px$. (*)

Входящая в это уравнение величина p называется параметром параболы. Параметр параболы равен расстоянию от директрисы параболы до ее фокуса.

Координаты фокуса F параболы (*) $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$. (фокус параболы лежит на ее оси симметрии) Уравнение директрисы параболы (*)

$x = -\frac{p}{2}$.

Эксцентриситет параболы $e = 1$.



$y^2 = 2px$ ($p > 0$)

Свойства параболы:

1) Парабола имеет ось симметрии (ось параболы). Точка пересечения параболы с осью называется вершиной параболы. Если парабола задана каноническим уравнением, то ее осью является ось Ox, а вершиной – начало координат.
2) Вся парабола расположена в правой полуплоскости плоскости Oxy.

Замечание. Используя свойства директрис эллипса и гиперболы и определение параболы, можно доказать следующее утверждение:

Множество точек плоскости, для которых отношение e расстояния до некоторой фиксированной точки к расстоянию до некоторой прямой есть величина постоянная, представляет собой эллипс (при $e<1$), гиперболу (при $e>1$) или параболу (при $e=1$).

Вариант №1

1. Окружность задана в общем виде $x^2+y^2-6x+2y-24=0$ привести уравнение окружности к каноническому виду, определить центр и радиус. Построить окружность.
2. По данному уравнению эллипса $4x^2 + 9y^2 = 180$

   Определить:

а) полуоси **a** и **b**

с) экцентриситет эллипса

д) координаты фокусов

е) построить данный эллипс

3. Написать уравнение гиперболы, если её фокусы находятся в точках $F_1(-4;0) F_2(4;0)$, а длина действительной оси равна 6.

4. По данному уравнению определить тип кривой и записать её канонический вид.

$16x^2 + 9y^2 - 4x + 6y - 11 = 0$

5. Что такое парабола? Свойства параболы.

Вариант №2

1. Составить уравнение окружности, касающейся оси Ох в начале координат и проходящей через точку А(0;-8), построить данную окружность.
2. По данному уравнению гиперболы $24x^2 - 25y^2 = 600$ определить:

а) полуоси **a** и **b**

б) экцентриситет

в) уравнение асимптот

г) построить данную гиперболу

3. Написать уравнение двух парабол с вершиной в начале координат, зная, что координаты их фокусов равны.

а) F(3;0);

б) F(0;-5)

4. По данному общему уравнению кривой 2-го порядка, определить тип кривой и записать каноническое уравнение кривой

$-25x^2 + 144y^2 - 10x - 24y + 64 = 0$

5. Какую кривую второго порядка мы назовём эллипсом? Перечислите свойства эллипса.

Практическая работа №8 «Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах»

Цель: Освоить на практических примерах действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

Теоретические сведения по выполнению практической работы:

Алгебраическая форма комплексного числа

Числа вида $\boxed{z = a + bi}$ **называются комплексными**.(1), а данная форма представления комплексного числа –алгебраической формой

a,b - любые действительные числа;

i - мнимая единица ($i^2 = -1$);

a - действительная часть комплексного числа;

bi - мнимая часть комплексного числа.

Комплексные числа принято изображать либо точкой, абсцисса которой равна *a*, а ордината равна *b*, либо радиус-вектором, начало которого в начале координат, а конец в точке (*a,b*)

Если a = 0, то комплексное число чисто мнимое, если b = 0, то комплексное число является действительным. Ось абсцисс называется действительной осью, ось ординат – мнимой.

Два комплексных числа называются равными, если равны их действительные части и равны мнимые части.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

1. Комплексные числа складываются, вычитаются и умножаются как многочлены.
2. При делении одного комплексного числа на другое делимое и делитель умножают на число, сопряженное делителю (**сопряженными называются комплексные числа вида *a + bi* и *a - bi***).

3.При возведении в степень комплексного числа пользуются формулами:

$$\boxed{i^{4n+1} = i, \qquad i^{4n+2} = -1, \qquad i^{4n+3} = -i, \quad i^{4n} = 1.}$$

Тригонометрическая форма комплексного числа

Модулем комплексного числа ***z = a + bi*** называется длина радиус-вектора этого числа. Модуль комплексного числа обозначается **r** и вычисляется по формуле $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$**.** (2)

Аргументом комплексного числа $z = a + b$**i** называется угол между вектором **z** и положительным направлением оси Ох. Каждому комплексному числу соответствует бесконечно много аргументов, которые задаются формулой $\varphi + 2\pi k, k \in Z, \quad 0 < \varphi < 2\pi$.

Обозначается *argz***.**

Из определений синуса и косинуса следует:

$a = r \cdot cos\varphi$, $b = r \cdot sin\varphi$ (рис.3)

Отсюда, $z = a + bi = r \cdot cos\varphi + i \cdot r \cdot sin\varphi = r(cos\varphi + i\ sin\varphi)$. Запись **вида** $\mathbf{z = r(cos\varphi + i \cdot sin\varphi)}$ называется **тригонометрической формой** комплексного числа.(3)

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

1. При умножении комплексных чисел их модули умножаются, а аргументы складываются.

2. При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

3. При возведении в степень комплексного числа его модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.

4. При извлечении корня n-й степени из комплексного числа извлекают корень n–й степени из модуля этого числа, а аргумент $\varphi + 2\pi k$, где k=0,1,…,n-1, делят на n.

1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

2) $z_1 / z_2 = \dfrac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

3) $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

4) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k = 0, 1, \ldots, n-1$

Показательная форма комплексного числа

Показательная форма комплексного числа имеет вид

$z = re^{i\varphi}$ (4) r - модуль, φ - аргумент комплексного числа.

$z = a + bi = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = re^{i\varphi}$ - так выглядит связь между всеми формами записи комплексного числа.

Действия над комплексными числами в показательной форме

1. При умножении комплексных чисел их модули умножаются, а аргументы складываются.

2. При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

3. При возведении в степень комплексного числа его модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.

4. При извлечении корня n-й степени из комплексного числа извлекают корень n–й степени из модуля этого числа, а аргумент $\varphi + 2\pi k$, где k=0,1,…,n-1, делят на n.

$$1)\quad z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \qquad 3)\quad z^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$$

$$2)\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \qquad 4)\quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, \quad k = 0,1,\ldots,n-1$$

Вариант №1

1. Даны 2 комплексных числа, изобразить их векторами на координатной плоскости и найти их сумму, разность, произведение и частное.

$z_1 = -4 + 2i \qquad z_2 = 3 - 2i$

2. Комплексное число задано в алгебраической форме.

а) z=-2i

б) z=-$\sqrt{3} + \sqrt{3}i$

представить их в тригонометрической форме и изобразить точками на

координатной плоскости.

3. Число, заданное в тригонометрической форме представить в показательной и перевести в алгебраическую форму.

$$z = 16(\cos\frac{\Pi}{6} + i\sin\frac{\Pi}{6})$$

Вариант №2

1. Даны 2 комплексных числа изобразить их векторами на координатной плоскости и найти их сумму и частное.

$z_1 = -i + 2 \qquad z_2 = -3 + 2i$

2. Комплексные числа заданы в алгебраической форме:

а) z=4

б) z=-$\sqrt{2} + 2i$

представить их в тригонометрической форме и изобразить на координатной плоскости вектором.

3. Комплексное число задано в тригонометрической форме, представить его в показательной форме и перевести в алгебраическую форму.

$Z=5(\cos\frac{\Pi}{3}+i\sin\frac{\Pi}{3})$

Практическая работа №9 «Переход от алгебраической к показательной форме»

Цель: освоить метод перехода от алгебраической формы к тригонометрической и показательной и обратно

Вариант №1

1. Комплексное число задано в алгебраической форме $z=-4+\sqrt{3}i$

   а) Найти модуль комплексного числа, и записать его мнимую часть

   б) найти значение выражения z^2-5i

   в) перевести комплексное число z в показательную форму
2. Перечислите действия над комплексными числами в алгебраической форме и показательной форме (формулы)
3. Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме

   $z_1=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\Pi}{6}+i\ \sin\frac{\Pi}{6}\right)$

   $z_2=\sqrt{5}(\cos\frac{\Pi}{7}+i\ \sin\frac{\Pi}{7})$

Вариант №2

1. Комплексное число задано в алгебраической форме $z=-2-\sqrt{3}i$

   а) найти модуль комплексного числа, записать его действительную часть

   б) найти значение выражения $(z-1)^2+6i$

   в) перевести комплексное число z в показательную форму
2. Запишите алгоритм перехода из алгебраической в тригонометрическую форму
3. Выполнить действия над комплексными числами в показательной форме

   $z_1=10\ e^{\frac{\Pi}{4}i}$

   $z_2=-3\ e^{\frac{\Pi}{2}i}$

Практическая работа №10 «Вычисление простых пределов»

Цель: Освоить вычисление простых пределов, используя понятия о пределе бесконечно малой и бесконечно большой последовательности(функции)

Теоретические сведения по выполнению практической работы:

Чтобы вычислить предел функции в точке x_0, надо в формулу, задающую функцию, вместо x подставить x_0.

При вычислении пределов могут возникнуть неопределенности, от которых необходимо избавляться. Символически их можно записать так: 0/0 , $\frac{\infty}{\infty}$ и другие

При раскрытии неопределенностей используют следующие приемы:

1) Сокращение дроби на множитель ([redacted])[redacted]при x[redacted]a.
2) Избавление от иррациональности в числителе или знаменателе дроби.
3) Разложение многочленов на линейные или квадратичные множители при x[redacted]a

Пример: Найти предел функции [redacted]

Решение: Имеем неопределённость вида 0/0Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель $x + 2$, который при $x \to -2$ не равен нулю. В результате неопределенность будет раскрыта. [redacted]

Вариант №1

Вычислить следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{-x^2+4x+5}{x^2-3x-10}$

2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x-4}{3x^2-5\sqrt{x}+10}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-x}{x^2+4x}$

4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2-3x-10}$

5. $\lim\limits_{a\to 9}\dfrac{\sqrt{a}-3}{81-a^2}$

6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-7x+12}$

7. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x-10}{x^2-20x+100}$

Вариант №2

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x+1}{5x-6x^2+9}$

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x-x^2+4}{x^2-9x+20}$

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^3+4x-6}{2x^2-6x^3+1}$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+6x+5}$

5. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\left(\sqrt{x^2-9}-4\right)}$

6. $\lim\limits_{a\to -2}\dfrac{8+a^3}{a+2}$

7. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{64-x^3}{16-x^2}$

Практическая работа №11 «Вычисление пределов с помощью замечательных»

Цель: Научиться вычислять пределы, используя понятие первого и второго замечательного предела

Теоретические сведения к выполнению практической работы:

Предел отношения синуса бесконечно малого угла к самому углу, есть величина постоянная, равная единице, т.е.$\lim\limits_{p\to 0}\frac{\sin p}{p} = \mathbf{0}$ или $\lim\limits_{p\to 0}\frac{p}{\sin p} = \mathbf{1}$

Предел суммы единицы и бесконечно малой величины, в степени бесконечно большой, есть величина постоянная, равная числу Эйлера $e \approx 2{,}7$.

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = (1^{\infty}) = e \lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = (1^{\infty}) = e$$

Вариант №1

Вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\sin x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{\sin 5x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{10\,x}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 7x}$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1}{x}}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}(1-7x)^{\frac{1}{x}}$;

Вариант №2

Вычислите пределы:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 8x}{x}$;

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4-tg\,x}-2}{tg\,x}$;

3. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin 7x}$;

4. $\lim_{x\to 0} \frac{tg\,x}{\sqrt{tg\,x+9}-3}$;

5. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}$;

6. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{\frac{x}{3}}$;

7. $\lim_{x\to \infty}\left(1-\frac{9}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$;

8. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x}{x-8}\right)^{\frac{x}{4}}$;

Практическая работа №12 «Вычисление простых производных»

Цель: Сформировать умения применять правила дифференцирования функций на конкретных практических примерах и задачах

Теоретические сведения по выполнению практической работы:

1. $\left(u^n\right)' = n\,u^{n-1} \cdot u'$

2. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$

3. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

4. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u', (u > 0)$

5. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$,
$a > 0, \quad a \neq 1, \quad u > 0$

6. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$

7. $\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$,
$a > 0, \quad a \neq 1$

8. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

9. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

10. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

11. $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

12. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

13. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

14. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

15. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

Вариант 1

1.Найдите производные следующих функций

1) y= sin x +cos3x+1/x   2) $y = x^7 ctgx$ 3) $y = \frac{3\sin x}{4x}$

4) $y = \frac{4x}{arctgx} - 2x$ 5) $y = 7x^2 ctgx$ 6) $y = \frac{\sqrt[5]{6x^9}}{6^x}$

2.Найдите производную функции в точке x=1

a) $y = \dfrac{\log_3 x}{\sqrt{x}}$ b) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2 - 3x + 1}$

3. Для функции $y=2x^2-4x+5$ в точке $x_o=-5$ составить уравнение касательной и вычислить угловой коэффициент и угол между касательной и осью абсцисс

4.Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t)=t^3+0{,}5t^2+7t$, определить скорость материальной точки в моменты времени t=2ct=9c

5. Запишите правила дифференцирования функций, и придумайте по одному примеру на каждое правило с решением

Вариант 2

1. Найдите производные следующих функций

1) $y = -6\ln x - x - \dfrac{10}{x^4}$ 2) $y = -9x^2 arcctgx$ 3) $y = \dfrac{\cos x}{\log_3 x}$

4) $y = \dfrac{1}{x} + 5\sqrt{x}$ 5) $y = 5\sqrt{x^9}\,\cos x$ 6) $y = \dfrac{\sqrt[8]{8x}}{\log_7 x}$

2.Найдите производную функции в точке $\mathbf{x = \frac{\pi}{4}}$

a) $y = \dfrac{5\mathrm{ctgx}}{\cos(x)+2}$ b) $y = \dfrac{-\sin x}{\cos x - \mathrm{tgx}}$

3. Для функции $y=-2x^3-4{,}5x^2+5x-1$ в точке $x_o=-7$ составить уравнение касательной и вычислить угловой коэффициент и угол между касательной и осью абсцисс

4.Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t)=6t^3+0{,}5t^2+6t$, определить скорость материальной точки в моменты времени t=6ct=10c

5.. Перечислите производные основных элементарных функций

Практическая работа №13«Вычисление производных сложных функций»

Цель: Освоить на конкретных примерах дифференцирование сложных функций

Теоретические сведения по выполнению практической работы:

Теорема Если функция $x = \varphi(t)$ имеет производную в точке *t,* а функция $y = f(x)$ имеет производную в точке *x*, то сложная функция

$$y = F(t) = f\left[\varphi(t)\right] \quad (1)$$

имеет производную (по[illegible]) в точке [illegible] и справедливо равенство

$$F'(t) = f'(x)\varphi'(t) \quad (2)$$

Пример[redacted] $(x \neq k\pi,\ k - \text{целое})$.

Полагаем [redacted], [redacted], [redacted]. Тогда

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x = \frac{1}{u} 2v \cos x = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^2 x} = 2 \operatorname{ctg} x.$$

$$y = \sin\left(x^2 + 2x - 1\right).$$

Вариант 1

Задание №1: Вычислить производные функций:

1. $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x^3\sqrt{x} + \frac{1}{x^3} + 7^{2x-7}$
2. $y = \left(x^4 - x^2 + 1\right)^{-10}$
3. $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x - 1}$
4. $y = \frac{1 - tg 2x}{1 + \cos 2x}$
5. $y = \lg \frac{10 - x}{x + 2}$

Задание №3: Найти дифференциалы функций:

1) $y = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$ 2)y=sin(cos(ln6x))

Вариант 2

Задание №1: Вычислить производные функций:

1. $y = \sqrt[3]{4x^3 - 7x^2 + 1}$
2. $y = \left(\sin^2 x + 1\right)e^x$
3. $y = \sqrt[3]{x^2 - 1} \cdot \left(x^4 - 1\right)$
4. $y = \ln\sqrt{x^2 - 1}$
5. $y = e^{x^3 - 5x^2}$

Задание №2: Найти дифференциалы функций:

1) $y = x^4\left(8\ln^2 x - 4\ln x + 1\right)$ 2) y=$2\sin^3(\ln 5x)$

Практическая работа №14 «Производные и дифференциалы высших порядков»

Цель: Освоить на практических примерах вычисление производных и дифференциалов порядка выше первого

Теоретические сведения по выполнению практической работы:

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором отрезке $[a, b]$. Значения производной $f'(x)$ зависят от x, т.е. производная $f'(x)$ тоже представляет собой некоторую функцию от x. Дифференцируя эту функцию, мы получаем производную от производной.

Определение: Производная от первой производной называется производной второго порядка или второй производной. Обозначается

$y''=(f'(x))'=f''(x)$. (1)

Физический смысл второй производной: вторая производная $f''(x)$ равна скорости изменения скорости, т.е. ускорению движущейся точки в момент времени x.

Вторая производная также может быть функцией, определенной на некотором множестве. Если эта функция имеет производную, то эта производная называется третьей производной функции $f(x)$ и обозначается $f'''(x)$.

Определение: Если определена $(n-1)$-я производная $f^{(n-1)}(x)$ и существует её производная, то она называется n-й производной функции $f(x)$:

$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

Все производные, начиная со второй, называются производными высших порядков.

Функцию, имеющую на данном множестве конечную производную порядка n, называют n раз дифференцируемой на данном множестве.

Дифференциал функции $y = f(x)$ выражается в виде $dy = f'(x)\,dx$. Тогда, если он является некоторой функцией от x, то справедливо следующее:

Определение: Дифференциал от дифференциала функции называется дифференциалом второго порядка или вторым дифференциалом:

$d^2y = f''(x)\,dx^2$

Определение: Дифференциал от дифференциала n-го порядка называется дифференциалом $(n+1)$-го порядка.

Вариант 1

Задание: Вычислить производные и дифференциалы функций $y'(x)$ и $y''(x)$

1. $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x^3\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^3}$
2. $y = \left(x^4 - x^2 + 1\right)^3$
3. $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 1}{x - 1}$
4. $y = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$
5. $y = \log\dfrac{10 - x}{x + 2}$

Вариант 2

Задание: Вычислить производные и дифференциалы функций $y'(x)$ и $y''(x)$

1. $y = \sqrt[3]{4x^3 - 7x^2 + 1}$
2. $y = (\sin x + 1)e^x$

3. $y=\left(x^4-1\right)\cdot\left(x^2-1\right)$

4. $y=\ln\sqrt{x^2-1}$

5. $y=e^{x^3-5x^2}$

Практическая работа №15 «Полное исследование функции. Построение графика»

Цель: Используя понятие производной, освоить на практических примерах исследование функции по свойствам

Теоретические сведения по выполнению практической работы:

Общая схема исследования функции и построения ее графика

1. Найти область определения функции. Выделить особые точки (точки разрыва).
2. Проверить наличие вертикальных асимптот в точках разрыва и на границах области определения.
3. Найти точки пересечения с осями координат
4. Установить, является ли функция чётной или нечётной.
5. Определить, является ли функция периодической или нет (только для тригонометрических функций, остальные непериодические, пункт пропускается).
6. Найти точки экстремума и интервалы монотонности (возрастания и убывания) функции.
7. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости.
8. Найти наклонные асимптоты функции.
9. Построить график функции.

Вариант №1

Задание №1: Провести полное исследование функции $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$ и построить её график.

Задание №2: Найти интервалы возрастания и убывания и экстремумы функции $y=\sqrt[3]{(2-x)(x^2-4x+1)}$

Вариант №2

Задание №1: Провести полное исследование функции $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ и построить её график.

Задание №2: Найти интервалы возрастания и убывания и экстремумы функции $y = -\sqrt[3]{(x+3)(x^3+6x+6)}$

Практическая работа №16 «Интегрирование функций с помощью таблицы и основных свойств»

Цель: Освоить и закрепить на практических примерах основные свойства неопределённого интеграла и метод непосредственного интегрирования функций.

Теоретические сведения по выполнению практической работы:

Свойства неопределенного интеграла

1. Интеграл суммы равен сумме интегралов: $\int \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла: $\int a\cdot f(x)dx = a\int f(x)dx$.
3. Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
4. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
5. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная $\int df(x) = f(x)+C$

Таблица основных неопределённых интегралов

$1. \int dx = x + C;$ $\qquad$ $6. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

$2. \int x dx = \frac{x^2}{2} + C;$ $\qquad$ $7. \int \sin x dx = -\cos x + C;$

$3. \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C;$ $\qquad$ $8. \int \cos x dx = \sin x + C;$

$4. \int \frac{dx}{x} = \ln x + C;$ $\qquad$ $9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$

$5. \int e^x dx = e^x + C;$ $\qquad$ $10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$

$$11. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C.$$

Вариант №1

Задание: Найти интегралы, используя таблицу и основные свойства.

1. $\int\left(4\sqrt{x}+\cos x-\frac{5}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

2. $\int\frac{5x}{x^2}dx$

3. $\int(e^x+6x-14x^{-5}+\frac{1}{x})dx$

4. $\int\frac{x^3+3x+1}{x}dx$

Вариант №2

Задание: Найти интегралы, используя таблицу и основные свойства.

1. $\int\cos\frac{t}{2}dt$

2. $\int\frac{x^3+4x}{x}dx$

3. $\int(e^x-\frac{1}{x})dx$

4. $\int\frac{2x^5-x^4-x-1}{7x^2}dx$

Практическая работа №17«Интегрирование заменой переменной и по частям в неопределенном интеграле»

Цель: Освоить на практических примерах различные методы интегрирования

Теоретические сведения по выполнению практической работы:

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (то есть подстановки). При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся.Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой. Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int F(x)dx.$$

Сделаем подстановку

$$x=\varphi(t),$$

Где, $\varphi(t)$— функция, имеющая непрерывную производную. Тогда

$$dx=\varphi'(t)\cdot dt$$

и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем формулу интегрирования подстановкой:

$$\int F(x)dx = \int F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Интегрирование по частям. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные первые производные и существует интеграл $\int v(x)\,du(x)$, то существует и интеграл $\int u(x)\,dv(x)$ и имеет место равенство:

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x) \bullet v(x) - \int v(x)\,du(x)$$

или в более короткой форме:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du\,.$$

Обратите внимание, что интегрирование по частям идифференциал произведения являются взаимно обратными операциями (проверьте !).

Вариант №1

Задание №1: Найти интегралы, используя подходящую подстановку.

1. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$
2. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+9}$
3. $\int \sqrt{4x^3+1}x^2 dx$
4. $\int \frac{xdx}{x^2-4}$

Задание №2: Найти интеграл, используя интегрирование по частям.

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$$

Вариант №2

Задание №1: Найти интегралы, используя подходящую подстановку.

1. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^6+7}}$
2. $\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$
3. $\int \sqrt[5]{2x-5}dx$
4. $\int \sqrt{e^x-5}e^x dx$

Задание №2: Найти интеграл, используя интегрирование по частям.

$$\int 3x^2 \ln x dx$$

Практическая работа №18 «Интегрирование рациональных функций»

Цель: Освоить на практических примерах интегрирование рациональных функций

Теоретические сведения по выполнению практической работы:

Таблица основных неопределённых интегралов

$$1. \int dx = x + C; \qquad 6. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$2. \int x dx = \frac{x^2}{2} + C; \qquad 7. \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$3. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C; \qquad 8. \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$4. \int \frac{dx}{x} = \ln x + C; \qquad 9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C; \qquad 10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$$

$$11. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C.$$

Вариант 1

Задание: Вычислить неопределенный интеграл

1) $\int \frac{5dx}{9 + 2x^2}$

3) $\int \frac{5dx}{(7x+2)^4}$

2) $\int \frac{dx}{\sin^2(3x+2)}$

4) $\int \frac{x^2 dx}{3x^3 + 4}$

Вариант 2

Задание: Вычислить неопределенный интеграл

1) $\int \frac{dx}{(4x+1)^4}$

2) $\int \frac{5dx}{9 + 2x^2}$

3) $\int \frac{x^3 dx}{2(x^4 - 7)}$

4) $\int \frac{x dx}{x^2 - 4}$

Практическая работа №19 «Интегрирование иррациональных функций»

Цель: Освоить на практических примерах интегрирование иррациональных функций

Теоретические сведения по выполнению практической работы:

Таблица основных неопределённых интегралов

$1. \int dx = x + C;$	$6. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$
$2. \int x dx = \frac{x^2}{2} + C;$	$7. \int \sin x dx = -\cos x + C;$
$3. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C;$	$8. \int \cos x dx = \sin x + C;$
$4. \int \frac{dx}{x} = \ln x + C;$	$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$
$5. \int e^x dx = e^x + C;$	$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$

$$11. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C.$$

Вариант 1

Задание: Вычислить неопределенный интеграл

1. $\int \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$

2. $\int \frac{3x^2 dx}{\sqrt{x}}$

3. $\int \left(2x^2 - \frac{1}{\sqrt{x^2}} + 3x - 1\right) dx$

4. $\int \frac{2dx}{\sqrt{5-4x^2}}$

Вариант 2

Задание: Вычислить неопределенный интеграл

1. $\int \frac{5dx}{\sqrt{1-x^2}}$

2. $\int \frac{3x^2 dx}{\sqrt{x^5}}$

3. $\int \frac{7dx}{\sqrt{3x^2+4}}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$

Практическая работа №20 «Нахождение определенного интеграла с помощью таблицы и основных свойств определенного интеграла»

Цель: Освоить и закрепить на практических примерах основные свойства определённого интеграла и метод непосредственного интегрирования функций.

Теоретические сведения по выполнению практической работы:

Определение. ***Определенным интегралом функции f(x), непрерывной на [a; b], называется приращение ее первообразной на этом промежутке***.

Обозначение: $\int\limits_a^b f(x)dx$, где ***a и b – пределы интегрирования*** (нижний и верхний соответственно).

По определению, $\int\limits_a^b f(x)dx$ = F(b) – F(a) = $F(x)|_a^b$ – **формула Ньютона – Лейбница**.

Таким образом, отличие определенного интеграла от неопределенного: определенный – число; неопределенный – множество функций.

Геометрический смысл определенного интеграла: ***если a≤b и ∀x∈[a; b] f(x) ≥ 0, то*** $\int\limits_a^b f(x)dx$ ***численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции***.

Свойства определенного интеграла

1. Интеграл суммы равен сумме интегралов:

$$\int\limits_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx.$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int\limits_a^b af(x)dx = a\int\limits_a^b f(x)dx.$$

3. Если поменять местами пределы интегрирования, то интеграл изменит знак:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$$

4. Если пределы интегрирования равны, то интеграл равен нулю:

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$$

5. Отрезок интегрирования можно разбить на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \ .$$

Вариант №1

1. **Перечислите свойства определённых интегралов. Приведите на каждое свойство не менее трёх примеров.**
2. **Вычислить следующие определённые интегралы.**

1. $\int_2^4 (\frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} - 2)dx$

2. $\int_{-1}^3 (2e^x - \frac{2}{3}x)dx$

3. $\int_{-2}^3 5x^2 dx$

4. $\int_0^2 (x^3 - 4x)dx$

5. $\int_1^4 (\sqrt{x} + 2x - \frac{1}{x})dx$

6. $\int_0^{\pi} (2\sin x - \frac{2}{3}\cos x + x)dx$

Вариант №2

1. **Запишите формулу Ньютона-Лейбница, и дайте характеристику каждому элементу в этой формуле, приведите не менее трёх примеров вычисления определённого интеграла по данной формуле.**
2. **Вычислить следующие определённые интегралы**

1. $\int_1^3 (\frac{2}{x^5} + \frac{-4}{x^3} - x - 7)dx$

2. $\int_{-1}^3 (2e^x - \frac{2}{3}x)dx$

3. $\int_1^3 \frac{4}{7} x^{\frac{1}{3}} dx \ \int_4^5 (\ln x - 4\sqrt{2x})dx$

4. $\int_1^4 (\sqrt{7x} + 2x^2 - \frac{1}{x^3})dx$

5. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos x - \frac{2}{3}\sin x + 3x)dx$

Практическая работа №21 «Вычисление определенных интегралов заменой переменной и по частям»

Цель: Освоить вычисление определённых интегралов методом замены переменных и по частям

Теоретические сведения по выполнению практической работы:

Интегрирование заменой в определенном интеграле

Пусть функция *y = f(x)* определена и непрерывна на отрезке *[a; b]*. Множество *[a; b]* является областью значений некоторой функции *x = g(z)*, которая определена на интервале $[\alpha; \beta]$ и имеет на нем непрерывную производную, причем $g(\alpha)=a$ и $g(\beta)=b$, тогда .

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(z)) \cdot g'(z)dz$$

Этой формулой удобно пользоваться в тех случаях, когда нам требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, причем неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ мы бы искали методом подстановки.

Интегрирование интегрированием по частям **по частям в определенном интеграле**

Пусть на отрезке *[a; b]* определены и непрерывны функции *u(x)* и *v(x)* вместе со своими производными первого порядка и функция $v'(x)\cdot u(x)$ – интегрируема, тогда на этом отрезке интегрируема функция $u'(x)\cdot v(x)$ и справедливо равенство .

$$\int_a^b v'(x)u(x)dx = (u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx$$

Этой формулой удобно пользоваться в тех случаях, когда нам требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, причем неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ мы бы искали

Вариант №1

1. **Перечислите свойства определённых интегралов. Чем определённый интеграл отличается от неопределённого.**
2. **Вычислить следующие определённые интегралы.**

1. $\int_2^4 (x^2-2)xdx$

2. $\int_{-1}^3 (\sqrt{x-3})dx$

3. $\int_{-2}^3 5x^2(x^3-5)dx \int_0^2 (x^2-4x)xdx$

4. $\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}dx$

5. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x dx$

Вариант №2

1. **Запишите формулу разложения по частям для определённого интеграла, и приведите пример.**
2. **Вычислить следующие определённые интегралы.**

1. $\int_{1}^{3} (x^2 + 3)xdx$
2. $\int_{-1}^{3} (\frac{6x}{\sqrt[4]{3 - x^2}})dx$
3. $\int_{1}^{3} \frac{4}{7} x^4 \sqrt{x^5 + 1}dx$
4. $\int_{-3}^{4} \frac{x}{5x^2 - 2}dx$
5. $\int_{1}^{4} (x^3 (x^4 - 2)dx$
6. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} x \cos x dx$

Практическая работа №22 «Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла»

Цель: Сформировать навыки использования понятияопределённого интеграла для решения прикладных задач

Теоретические сведения по выполнению практической работы

Пусть на отрезке [a; b] оси Ох задана непрерывная функция f, не меняющая на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком [a; b] и прямыми x = a и x = b (рис. 1), называют **криволинейной трапецией**. Различные примеры криволинейных трапеций приведены на рисунках 1, а — д.

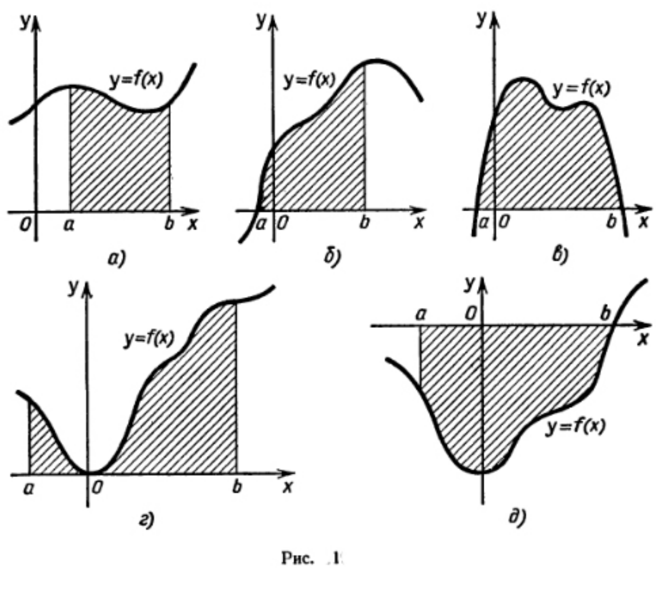


Рис. 1

Для вычисления площадей криволинейных трапеций применяется следующая теорема: **Теорема. Если f — непрерывная и неотрицательная на отрезке [a; b] функция, а F — ее первообразная на этом отрезке, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке [a; b] т. е.**
S=F(b)-F(a). (1)
S=S(b)=F(b)-F(a).
Вариант №1

Задание: Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций. Изобразить схематически полученные фигуры.

1. $y = x$, $y = x^2 + 4$, $y = -x + 1$.
2. $y = \frac{4}{3}x + 4$, $y = -2$, $x = 1$.
3. $y = \sin x$, $x = -\pi$, $x = \pi$, ось Ox.

Вариант №2

Задание: Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций. Изобразить схематически полученные фигуры.

1. $y = -(x + 2)^2 + 2$, $y = x$, $y = -x - 3$.
2. $y = x^3$, $y = -3$, $y = 3$.
3. $y = \sin x$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, ось Ox.

Практическая работа№23 «Вычисление частных производных и дифференциалов функций нескольких переменных»

Цель: Освоить приёмы дифференцирования функции двух переменных

Теоретические сведения по выполнению практической работы

Частная производная (первого порядка) функции нескольких переменных по одному из независимых аргументов определяется как производная этой функции по соответствующему аргументу при условии, что остальные переменные считаются постоянными. При вычислении частных производных используются обычные функции дифференцирования.

Частной производной функции z=z(x, y) двух независимых переменных x и y по аргументу x называется производной этой функции по x при постоянном y. Аналогично, частной производной функции z=z(x, y) по аргументу y называется производной этой функции, вычисленная при постоянной x. Частная производная обозначаются следующим образом: $z'_x = \frac{dz}{dx}; z'_y = \frac{dz}{dy}$.

Полный дифференциал дифференцируемой функции *z=z(x,y)* в некоторой точке *P(x, y)* есть выражение вида:

$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$ (1), где $\frac{dz}{dx}; \frac{dz}{dy}$ вычисляются в точке *P(x, y),* а дифференциалы независимых переменных равны их приращениям: $dx = \Delta x, dy = \Delta y$.

Формула (1) для дифференциала остаётся в силе, если *x* и *y* являются функциями каких – либо других аргументов.

Аналогично можно определить или вычислить полный дифференциал функции любого числа независимых переменных.

Теоремы и формулы для дифференциалов функций двух, трёх и так далее аргументов аналогичны соответствующим теоремам и формулам для функций одного аргумента.

Вариант №1

1. **Найти частные производные первого и второго порядка** $z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.
2. **Найти частные производные функции в точке M(1,2)** $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$.
3. **Найти частные производные, частные дифференциалы и полный дифференциал данных функций.**

a) $z = \frac{x^2y}{x + \sin y}$. **b)** $z = \ln\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

Вариант №2

1. **Найти частные производные первого и второго порядка** $z = 3yx^4 + y^4x - 4x^2$.
2. **Найти частные производные функции в точке M(4,1)** $z = x^2\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt{x}}$.
3. **Найти частные производные, частные дифференциалы и полный дифференциал данных функций.**

a) $z = \frac{xy}{x^2 - tgy}$ **b)** $z = \ln\frac{\sqrt{y} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$

Практическая работа №24 «Вычисление экстремумов функций нескольких переменных»

Цель: Освоить применение частных производных для нахождения экстремумов функции нескольких переменных

Теоретические сведения по выполнению практической работы:

Пусть функция z = f(x;y) определена в некоторой области D, точка N(x_0;y_0) Î D.

Точка (x_0;y_0) называется точкой максимума функции z=f(x;y), если существует такая d-окрестность точки (x_0;y_0), что для каждой точки (x;y), отличной от (x_o;y_o), из этой окрестности выполняется неравенство f(x;y)<f(x_o;y_o).

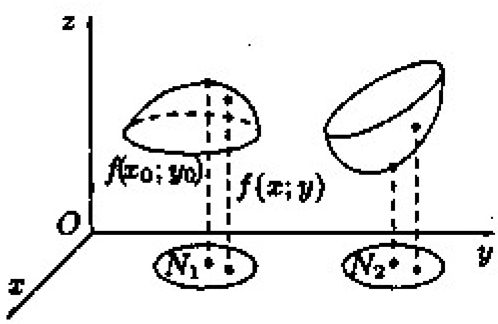


Рис. 210.

Аналогично определяется точка минимума функции: для всех точек (x; y), отличных от (x_0;y_0), из d-окрестности точки (x_o;y_o) выполняется неравенство: f(x;y)>f(x_0;y_0).

На рисунке 210: N_1 — точка максимума, а N_2 — точка минимума функции z=f(x;y).

Значение функции в точке максимума (минимума) называется максимумом (минимумом) функции. Максимум и минимум функции называют ее экстремумами.

Отметим, что, в силу определения, точка экстремума функции лежит внутри области определения функции; максимум и минимум имеют локальный (местный) характер: значение функции в точке (x_0;y_0) сравнивается с ее значениями в точках, достаточно близких к (x_0; y_0). В области D функция может иметь несколько экстремумов или не

Необходимые и достаточные условия экстремума

Рассмотрим условия существования экстремума функции.

Теорема (необходимые условия экстремума). Если в точке N(x_0;y_0) дифференцируемая функция z=f(x;y) имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю: f'_x(x_0;y_0)=0, f'_y(x_0;y_0)=0.

Зафиксируем одну из переменных. Положим, например, y=y_0. Тогда получим функцию f(x;y_0)=φ(x) одной переменной, которая имеет экстремум при x = x0. Следовательно, согласно необходимому условию экстремума функции одной переменной (см. п. 25.4), φ'(x_0) = 0, т. е. f'x(x0;y0)=0.

Аналогично можно показать, что f'_y(x_0;y_0) = 0.

Геометрически равенства f'_x(x_0;y_0)=0 и f'_y(x_0;y_0)=0 означают, что в точке экстремума функции z=f(x;y) касательная плоскость к поверхности, изображающей функцию f(x;y), параллельна плоскости Oxy, т. к. уравнение касательной плоскости есть z=z_0 (см. формулу (45.2)).

Замечание. Функция может иметь экстремум в точках, где хотя бы одна из частных производных не существует. Например, функция

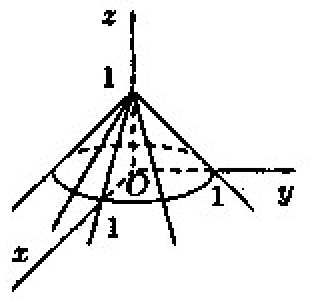


Рис. 211.

$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ имеет максимум в точке O(0;0) (см. рис. 211), но не имеет в этой точке частных производных.

Точка, в которой частные производные первого порядка функции $z \approx f(x; y)$ равны нулю, т. е. $f'_x=0$, $f'_y=0$, называется **стационарной точкой**функции z.

Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются **критическими точками.**

В критических точках функция может иметь экстремум, а может и не иметь. Равенство нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума. Рассмотрим, например, функцию z = xy. Для нее точка O(0; 0) является критической (в ней $z'_x=y$ и z'_y — x обращаются в ноль). Однако экстремума в ней функция z=xy не имеет, т. к. в достаточно малой окрестности точки O(0; 0) найдутся точки для которых z>0 (точки I и III четвертей) и z < 0 (точки II и IV четвертей).

Таким образом, для нахождения экстремумов функции в данной области необходимо каждую критическую точку функции подвергнуть дополнительному исследованию.

Теорема 46.2 (достаточное условие экстремума). Пусть в стационарной точке $(x_o;y_o)$ и некоторой ее окрестности функция $f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке $(x_0;y_0)$ значения $A=f''_{xx}(x_0;y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0;y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0;y_0)$. Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда:

1. если $\Delta > 0$, то функция $f(x;y)$ в точке $(x_0;y_0)$ имеет экстремум: максимум, если $A< 0$; минимум, если $A > 0$;

2. если $\Delta < 0$, то функция $f(x;y)$ в точке $(x_0;y_0)$ экстремума не имеет.

В случае $\Delta = 0$ экстремум в точке $(x_0;y_0)$ может быть, может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

Вариант № 1

1. **Найдите экстремумы для следующих функций:**

   1) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

   2) $z = 3x^3 + y^2 + 4xy - x + 2$

2. **Запишите необходимые условия существования экстремума**

Вариант № 2

1. **Найдите экстремумы для следующих функций:**

   1) $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$

2) $z = 3x^3 + y^3 + 2y - x + 2$

2. **Запишите достаточные условия существования экстремума в точке**

Практическая работа №25 «Вычисление двойных интегралов в случае области 1-го и 2-го типа»

Цель: Освоить вычисление двойных интегралов в случае области 1-го и 2-го типа

Теоретические сведения по выполнению практической работы:

Области интегрирования I и II типа

Двойные интегралы вычисляются, как правило, с помощью повторных интегралов. Однако переход от двойных к повторным интегралам возможен не для произвольной области интегрирования *R*, а для областей определенного типа. Введем понятия областей интегрирования типа I и II.

Определение 1. Говорят, что область *R* на плоскости относится к *типу I* или является *элементарной относительно оси Oy*, если она лежит между графиками двух непрерывных функций, зависящих от *x* (рисунок 1), и описывается множеством:

$$R = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ p(x) \le y \le q(x)\}.$$

Определение 2. Говорят, что область *R* на плоскости относится к *типу II* или является *элементарной относительно оси Ox*, если она лежит между графиками двух непрерывных функций, зависящих от *y* (рисунок 2), и описывается множеством:

$$R = \{(x,y) \mid u(y) \le x \le v(y),\ c \le y \le d\}.$$

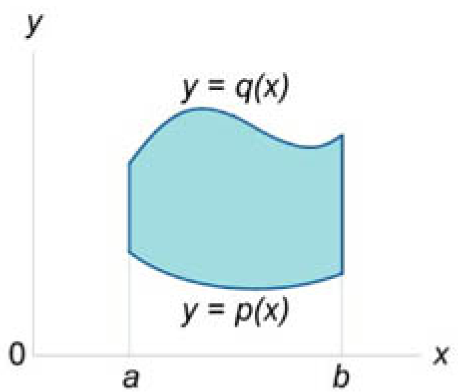


Рис.1

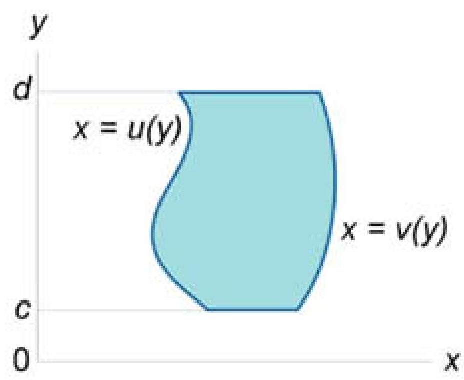


Рис.2

Связь между двойными и повторными интегралами

Пусть $f(x,y)$ является непрерывной функцией в области R типа I:

$$R=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\ p(x)\le y\le q(x)\}.$$

Тогда двойной интеграл от функции $f(x,y)$ в данной области выражается через повторный интеграл в виде

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA=\int\limits_a^b\int\limits_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Для области интегрирования типа II существует аналогичная формула. Если $f(x,y)$ является непрерывной функцией в области R типа II:

$$R=\{(x,y)\,|\,u(y)\le x\le v(y),\ c\le y\le d\},$$

то справедливо соотношение

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA=\int\limits_c^d\int\limits_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Приведенные формулы (в англоязычной литературе они известны как *теорема Фубини*) позволяют вычислять двойные интегралы через повторные. В повторных интегралах сначала находится внутренний интеграл, а затем - внешний.

Пример №1Найти повторный интеграл $\int\limits_0^1\int\limits_1^2 xy\,dy\,dx$.

Решение.

Сначала вычислим внутренний интеграл и затем внешний.

$$\int\limits_0^1\int\limits_1^2 xy\,dy\,dx=\int\limits_0^1\left[\int\limits_1^2 xy\,dy\right]dx=\int\limits_0^1\left[x\frac{y^2}{2}\bigg|_1^2\right]dx=\int\limits_0^1\frac{3}{2}x\,dx=\frac{3}{2}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1=\frac{3}{4}.$$

Пример №2 Найти повторный интеграл $\int\limits_0^1\int\limits_y^{y^2}(x+2y)\,dx\,dy$.

Решение.

Здесь область интегрирования относится к типу II (является элементарной относительно оси Ox). Вычисляя сначала внутренний интеграл по x, и затем внешний по y, получаем

$$\int_0^1\int_y^{y^2}(x+2y)\,dxdy=\int_0^1\left[\int_y^{y^2}(x+2y)\,dx\right]dy=\int_0^1\left[\left(\frac{x^2}{2}+2yx\right)\Bigg|_y^{y^2}\right]dy=\int_0^1\left[\left(\frac{y^4}{2}+2y^3\right)-\left(\frac{y^2}{2}+2y^2\right)\right]dy=$$

$$=\int_0^1\left[\frac{y^4}{2}+2y^3-\frac{5y^2}{2}\right]dy=\left[\frac{y^5}{10}+\frac{y^4}{2}-\frac{5y^3}{6}\right]\Bigg|_0^1=\frac{1}{10}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}=-\frac{7}{30}.$$

Вариант 1

1.Вычислить двойной интеграл и поменять местами порядок обхода интеграла

$$\int_1^2 \boldsymbol{dx}\int_x^{x^2}(\boldsymbol{2x-y})\boldsymbol{dy}$$

2.Вычислить повторный интеграл

$$\int_0^1 dy\int_y^{y+2} 2xydx$$

3. Вычислить двойной интеграл по областям, ограниченными указанными линиями

$\iint_D (12x^2y^2+16x^3y^3)dxdy$, D: x=1; y=$x^2$; y= $-\sqrt{x}$

Вариант 2

1) Вычислить двойной интеграл и поменять местами порядок обхода интеграла

$$\int_{-2}^2 dy\int_0^{y2}(2y-x)\,dx$$

2) Вычислить повторный интеграл

$$\int_0^1 dx\int_0^2\left(x^2+y\right)dy$$

3) Вычислить двойной интеграл по области, ограниченный указанными линиями

$\iint_D x^2+y^2$, D: y=x, $y=\frac{1}{x}$, $x=2$

Литература: Баврин И.И. «Высшая математика» ГЛ 7 §7.6 №№ 61-64 стр. 369

Практическая работа №26 «Приложение двойного интеграла в геометрии»

Цель: Освоить вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Теоретические сведения по выполнению практической работы:

Для вычисления двойного интеграла в полярных координатах применяют тоже правило сведения его к двукратному интегралу.

Если область D^* ограничена лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, где $\alpha < \beta$ и кривыми $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$, где $r_1(\varphi) \le r_2(\varphi)$, т.е. область D^* правильная, то:

$$\iint_{D^*} r \cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)drd\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r \cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr$$

Пример:

Вычислить $\iint_D \sqrt{9 - x^2 - y^2}dxdy$, где область D – круг $x^2 + y^2 \le 9$

Перейдем из декартовой системы координат в полярную:

$$\iint_D \sqrt{9 - x^2 - y^2}dxdy = \iint_D \sqrt{9 - (r\cos\varphi)^2 - (r\sin\varphi)^2} \cdot rdrd\varphi = \iint_D \sqrt{9 - r^2} \cdot rdrd\varphi$$

Область D в полярной системе координат определяется неравенствами $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 3 \end{cases}$.

Область D – круг, преобразовывается в область D^* - прямоугольник. Поэтому:

$$\iint_D \sqrt{9 - r^2} \cdot rdrd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 r\sqrt{9 - r^2}dr = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (9 - r^2)^{\frac{1}{2}} \cdot d(9 - r^2)$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\left. \frac{(9 - r^2)^{\frac{3}{2}} \cdot 2}{3} \right|_0^3 \right) d\varphi = -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (0 - 27)d\varphi = 9\varphi|_0^{2\pi} = 18\pi$$

Вариант №1

1. Вычислить повторные интегралы в полярных координатах

1) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_2^4 r^2 \sin\varphi dr$ 2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_2^{3,5} 2r^2 \cos\varphi dr$

2. Вычислить площадь области D, заданной неравенствами $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$,

   $1 \le r \le 3$

3. Вычислить площадь плоской фигуры в прямоугольных координатах, если область Dограничена линиями: $y = \frac{4}{x}, \quad y = x, \quad y = 4$

Вариант №2

1. Вычислить повторные интегралы в полярных координатах

   1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{1}^{4} r^3 \sin\varphi dr$ 2) $\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{2}^{5} \frac{r^2}{3} \cos\varphi dr$

2. Вычислить площадь области D, заданной неравенствами $\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$,

   $3 \le r \le 6$

3. Вычислить площадь плоской фигуры в прямоугольных координатах, если область D, ограничена линиями: $y = \frac{8}{x}, \quad y = -x + 9$

Практическая работа №27 «Исследование числовых рядов на сходимость»

Цель: Освоить исследование положительных числовых рядов на сходимость, используя различные признаки сходимости

Теоретические сведения по выполнению практической работы:

Необходимый признак сходимости ряда

Теорема. Если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

Подчеркнём, что рассмотренный признак является только необходимым, но не достаточным, то есть из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ не следует, что ряд сходится.

Позже докажем, что так называемый гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \qquad (6)$$

расходится, хотя $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Этот ряд часто будет использоваться в дальнейшем.

Достаточные признаки сходимости знакоположительных числовых рядов

Определение Числовой ряд называется знакоположительным, если $u_n>0$ при всех $n=1,2,3\ldots$.

Нахождение суммы ряда $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ часто связано с большими техническими трудностями. В таких случаях сумму находят приближённо: $S\approx S_n$. Последнее равенство тем точнее, чем большеn, при условии, что ряд сходится. Сходимость или расходимость ряда во многих случаях можно установить с помощью достаточных признаков сходимости числовых рядов. В этом параграфе будем рассматривать знакоположительные числовые ряды. Для таких рядов частичные суммы $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ образуют возрастающую числовую последовательность $S_1<S_2<\ldots<S_n<\ldots$.

Возможны два случая:

1) последовательность частичных сумм неограничена; в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$ и ряд расходится;

2) последовательность частичных сумм ограничена, то есть существует такое число $C>0$, что $S_n<C$ при любых $n=1,2,\ldots$. В этом случае существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, следовательно, ряд сходится.

Таким образом, для доказательства сходимости знакоположительного числового ряда достаточно доказать ограниченность последовательности его частичных сумм.

***Теорема 4*. (Признак сравнения)**

Пусть даны два знакоположительных числовых ряда

$u_1+u_2+\ldots+u_n\ldots$ (7)

$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots,$ (8)

причём $u_n\le v_n$ при любых $n=1,2,\ldots$.

Тогда: 1. Если ряд (8) сходится, то сходится и ряд (7);

2. Если ряд (7) расходится, то расходится и ряд (8).

Замечания.

1. В силу теоремы 1 признак сравнения справедлив и в случае, если $u_n\le v_n$ начиная с некоторого номера κ, то есть при $n\ge k$.

2. Для использования признака сравнения нужно иметь для сравнения ряды, про которые заранее известно, сходятся они или расходятся. В качестве таких рядов можно использовать сходящуюся бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, а также обобщённые гармонические ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k},$ где κ – действительное число. Несколько позже будет доказано, что при $\kappa\le 1$ такие ряды расходятся, а при $k>1$ сходятся. При $\kappa=1$ получаем уже упоминавшийся расходящийся гармонический ряд.

***Теорема 5.* (Предельный признак сравнения)**

Пусть даны два знакоположительных числовых ряда (7) и (8). Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A\neq 0$, то ряды (7) и (8) сходятся или расходятся одновременно.

Замечание. Предельный признак сравнения рекомендуется применять в тех случаях, когда общий член ряда представляет собой отношение степенных функций. Для сравнения выбирается обобщённый гармонический ряд, общий член которого равен отношению старших степеней числителя и знаменателя общего члена данного ряда.

Пример.

Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{n^3+n+1}.$ Здесь $u_n=\frac{n^2+2}{n^3+n+1}.$

Возьмём для сравнения ряд с общим членом $v_n=\frac{n^2}{n^3}=\frac{1}{n},$ то есть расходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$ Применим предельный признак сравнения.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2)n}{n^3+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n}{n^3+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=1\ {}^{1}0,$$

следовательно, данный ряд расходится по предельному признаку сравнения.

Теорема (***Признак Даламбера)***

Пусть дан знакоположительный числовой ряд

$u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ (7)

и пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = p.$ При p<1 ряд (7) сходится, при p>1 ряд (7) расходится.

Замечания.

1. Если расходимость ряда установлена с помощью признака Даламбера, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n{}^1 0$.

2. При p=1 признак Даламбера не даёт ответа о сходимости ряда. В этом случае нужно применять другие признаки сходимости.

3. Признак Даламбера рекомендуется применять при наличии в выражении общего члена ряда показательной функции или факториала.

Пример.

Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}.$

Применим признак Даламбера. $u_n = \frac{2n-1}{3^n}$, $u_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{3^{n+1}} = \frac{2n+1}{3^{n+1}}$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot(2n-1)} = \frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1,$ следовательно, ряд сходится по признаку Даламбера.

Теорема (Признак Коши)

Пусть дан знакоположительный числовой ряд $u_1+u_2+\ldots+u_n\ldots$ (7)

и пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = p.$ При p<1 ряд (7) сходится, при p>1 ряд (7) расходится.

Теорема (Интегральный признак Коши)

Пусть члены знакоположительного числового ряда $u_1+u_2+\ldots+u_n\ldots$ (7) не возрастают: $u_1{}^3u_2 \geq \ldots \geq u_n \geq \ldots$ и пусть $f(x)$ такая положительная, непрерывная, невозрастающая на промежутке [1;∞) функция, что $f(1)=u_1, f(2)= u_2 ,\ldots,$ $f(n)= =u_n,\ldots$. Тогда ряд (7) сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx.$

Вариант №1

1. Исследовать ряды на сходимость, используя необходимый и достаточные признаки, и сделать проверку:

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^3 - 1}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n(n-1)(n+2)}$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{4^n n!}$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$$

2. В чём состоит суть признака сравнения при исследовании рядов, приведите примеры.

Вариант №2

1. Исследовать ряды на сходимость, используя необходимый и достаточные признаки, и сделать проверку:

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+6}{n(n+1)(n+2)}$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n-1)!8^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{n^2+5n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$

3. В чём состоит суть признака Даламбера при исследовании рядов, приведите примеры.

Практическая работа №28. Исследование знакочередующихся рядов на абсолютную и условную сходимость

Цель: Освоить на практических примерах исследование знакочередующихся рядов на абсолютную и условную сходимость

Теоретические сведения по выполнению практической работы:

Числовой ряд, содержащий бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных членов, называется *знакопеременным*. Частным случаем знакопеременного ряда являетсяз*накочередующийся ряд*, то есть такой ряд, в котором последовательные члены имеют противоположные знаки.

Признак Лейбница

Для знакочередующихся рядом действует достаточный *признак сходимости Лейбница*. Пусть $\{a_n\}$ является числовой последовательностью, такой, что

1. $a_{n+1} < a_n$ для всех n;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда знакочередующиеся ряды $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n$ сходятся.

Абсолютная и условная сходимость

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ также сходится. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится абсолютно, то он является сходящимся (в обычном смысле). Обратное утверждение неверно.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*, если сам он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

Вариант 1

1. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость абсолютную или условную.

$$1.\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5}{n^3-1} \qquad 2.\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4(n^2+n)}{(n-2)(n+3)} \qquad 3\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(2n+1)!}$$

2. Разложить функцию $y=e^{4x}$ в ряд Маклорена.

3. Какой ряд называется функциональным и степенным, приведите примеры. Запишите, как выглядит разложение функции в ряд Тейлора и Маклорена.

Вариант 2

1. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость абсолютную или условную.

$$1.\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4}{7^n} \qquad 2.\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3(n^2+n)}{(7n^5-2)(n-5)} \qquad 3\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(2n-1)!}$$

2. Разложить функцию $y=\sin 3x$ в ряд Маклорена.
3. Сформулируйте признак Лейбница, необходимый для исследования знакочередующихся рядов на сходимость. Если признак Лейбница не выполняется, что можно сказать о сходимости знакочередующегося ряда.

Практическая работа №29-30 Интегрирование дифференциальных уравнений с разделенными и разделяющимися переменными. Решение дифференциальных уравнений второго порядка.

Цель: Освоить решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, и однородных дифференциальных уравнений первого порядка

Теоретические сведения по выполнению практической работы:

Дифференциальным уравнением называется уравнение, которое содержит производную функции.

Решением дифференциального уравнения называется функция, подстановка которой обращает это уравнение в тождество.

Решение, содержащее произвольную постоянную С, называется **общим** решением дифференциального уравнения.

Если, учитывая начальные условия, найти значение С и подставить его в общее решение, то полученное решение называется **частным.**

Задача отыскания частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям, называется задачей **Коши**.

График функции, являющейся частным решением дифференциального уравнения, называется **интегральной кривой**.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в это уравнение.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида **P(y)dy = Q(x)dx** **(1)**

называется дифференциальным уравнением с **разделенными** переменными. Это уравнение решается интегрированием обеих частей. Уравнением с **разделяющимися** переменными называется уравнение, которое можно привести к виду (1).

Рассмотрим примеры решения дифференциальныхуравнений с разделяющимися переменными:

Пример 1. **Найти общее решение дифференциального уравнения (x+2) dy – ydx = 0.**

Решение. 1) Разделим переменные. Для этого перенесем ydx в правую часть уравнения и разделим обе части уравнения на (x+2) и на y:

$$\frac{äó}{ó} = \frac{äõ}{õ + 2}$$

2) Проинтегрируем обе части уравнения: $\int \frac{\partial y}{y} = \frac{\partial x}{x+2}$;

$$\ln|y| = \ln|x+2| + C;$$

Так как C - произвольная постоянная, ее можно записать в виде lnC.

$\ln|y| = \ln|x+2| + \ln C$; $\ln|y| = \ln|C(x+2)|$ $y = C(x+2)$ − <u>общее решение</u>

Ответ: y = C(x+2)

Вариант №1

Задание №1 Найдите общее и частное решение дифференциального уравнения

1. $x^3 ydx = y^2 xdy$, при y=2, x=3
2. $(x+3)ydy - 3(y-3)xdx = 0$,при y=1, x=1
3. $(y-1)dx - (x-1)dy = 0$ при y=1 x=1
4. $2(x^2 - 4)ydy + (y^2 - 4)xdx = 0$ при y=1 x=1

5. $\frac{dx}{\sqrt{x}} - \frac{xdy}{\sqrt[3]{y}} = 0$ при y=1 x=1

Вариант №2

Задание №1 Найдите общее и частное решение дифференциального уравнения

1. $x^2 ydx = y^3 xdy,$ при y=2, x=2
2. $(x+1)ydy + 3(y-3)xdx = 0$,при y=1, x=1
3. $ydx - xy^2 dy = 0$ при y=1 x=2
4. $(x^2 - 1)ydy + (y^2 + 1)xdx = 0$ при y=2 x=2
5. $\frac{y^3 dx}{\sqrt{x}} + \frac{x^2 dy}{\sqrt[3]{y}} = 0$ при y=1 x=1

Задание №2 Ответить на контрольные вопросы

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Какое решение дифф. уравнения называется частным, какое общим?
3. В чём состоит суть метода разделяющихся переменных?
4. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением первого порядка? Приведите пример
5. Какое дифференциальное уравнение называется однородным дифференциальным? Приведите пример
6. Запишите чему равно частное решение в первых 3 примерах.

Литература: Баврин И.И. «Высшая математика» ГЛ 8 §8.1 Упр. №№6-12 стр. 428

ГЛ 9§9.1 с 431 Упр.№36-42№1-8

4. Информационное обеспечение обучения

Основные источники:

1. Новак, Е. В. Высшая математика. Алгебра : учебное пособие для СПО / Е. В. Новак, Т. В. Рязанова, И. В. Новак ; под ред. Т. В. Рязановой. — 2-е изд. — Саратов, Екатеринбург : Профобразование, Уральский федеральный университет, 2019. — 115 c. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/87795.html (дата обращения: 26.09.2019). — Режим доступа: для авторизир. Пользователей
2. Гончаренко, В.М. Элементы высшей математики: учебник / Гончаренко В.М., Липагина Л.В., Рылов А.А. — Москва: КноРус, 2019. — 363 с. — (СПО). — URL: https://book.ru/book/931506. — Текст : электронный.
3. Высшая математика [Электронный ресурс]: учебное пособие для СПО/ В.И. Белоусова [и др.]. — Электрон.текстовые данные.— Саратов, Екатеринбург: Профобразование, Уральский федеральный университет, 2019.— 296 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/87794.html.— ЭБС «IPRbooks»
4. Алексеев Г.В. Высшая математика. Теория и практика [Электронный ресурс]: учебное пособие для СПО/ Алексеев Г.В., Холявин И.И.— Электрон.текстовые данные.— Саратов: Профобразование, Ай Пи Эр Медиа, 2019.— 236 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/81274.html.— ЭБС «IPRbooks»

Дополнительные источники:

1. Сборник задач по высшей математике 1 курс / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко.- 7-е изд.-М.: Айрис-пресс, 2008.-576 с.
2. Григорьев В.П. Элементы высшей математики [Текст]: учеб.для студентов учреждений СПО / В. П. Григорьев. - 9-е изд., стер. - М.: Академия, 2013. - 320 с.
3. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике [Текст]: учеб.пособие для студентов учреждений СПО / В. П. Григорьев. - 3-е изд., стер. - М.: Академия, 2013. - 160 с. - (СПО.Информатика и вычислительная техника).

Интернет-ресурсы:

1. www.lib.mexmat.ru/books/41 – электронная библиотека механико-математического факультета МГУ;
2. http://mat.1september.ru;газета «Математика» издательского дома «Первое сентября»
3. www.edu.ru – федеральный портал российского образования;
4. www.mathnet.ru – общероссийский математический портал;
5. www.elibrary.ru – научная электронная библиотека;
6. www.matburo.ru – матбюро: решения задач по высшей математике;
7. www.nehudlit.ru - электронная библиотека учебных материалов