

Департамент внутренней и кадровой политики Белгородской области
Областное государственное автономное
профессиональное образовательное учреждение
«Белгородский индустриальный колледж»

Рассмотрено
цикловой комиссией
«Информатики и ПОВТ»
Протокол заседания № 1
от «30» августа 2019 г.
Председатель цикловой комиссии
_____ Третьяк И.Ю.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению самостоятельных работ
по дисциплине
ЕН.03 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
СТАТИСТИКА

по специальности
09.02.06 «Сетевое и системное администрирование»

Квалификация Сетевой и системный администратор

Разработчик:
Преподаватель
Белгородский индустриальный
колледж
Киреева О.В.

Белгород 2019 г.

Содержание

1. Пояснительная записка	3
1.1 Краткая характеристика дисциплины, ее цели и задачи	3
1.2 Перечень внеаудиторных самостоятельных работ	5
2. Рекомендации по работе при выполнении заданий	6
3. Информационное обеспечение обучения	19

1. Пояснительная записка

1.1. Краткая характеристика дисциплины, ее цели и задачи

Методические указания по организации и выполнению внеаудиторной самостоятельной работы разработаны в соответствии с ФГОС по специальности СПО 09.02.06 «Сетевое и системное администрирование».

Структура методических указаний определена последовательностью изучения дисциплины ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистика.

Программой дисциплины ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистика предусмотрено выполнение внеаудиторных самостоятельных работ в количестве 2 часов.

Видами заданий для внеаудиторной самостоятельной работы являются:

- для овладения знаниями: чтение текста (учебника, первоисточника, дополнительной литературы), составление плана текста, графическое изображение структуры текста, конспектирование текста, выписки из текста, работа со словарями и справочниками, ознакомление с нормативными документами, Интернета и др.

- для закрепления и систематизации знаний: работа с конспектом лекции, обработка текста, повторная работа над учебным материалом (учебника, первоисточника, дополнительной литературы, составление плана, составление таблиц для систематизации учебного материала, ответ на контрольные вопросы, заполнение рабочей тетради, аналитическая обработка текста (аннотирование, рецензирование, реферирование, конспект-анализ и др.), подготовка мультимедиа сообщений/докладов к выступлению, подготовка реферата, составление библиографии, тематических кроссвордов, тестирование и др.

- для формирования умений: решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач, выполнение чертежей, схем, выполнение расчетов (графических работ), решение ситуационных (профессиональных) задач, подготовка к деловым играм, проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности, рефлексивный анализ профессиональных умений с использованием аудио- и видеотехники и др.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами обучающихся в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений обучающихся.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы может проходить в письменной, устной или смешанной форме. Приветствуется выполнение заданий, не предусмотренных в данных методических указаниях, самостоятельно изучаемые материалы могут быть зачтены и учтены в выставлении оценок по итогам семестра.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен обладать общими компетенциями, включающими в себя способность:

- ОК1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам
- ОК2. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности
- ОК3. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие
- ОК4. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами
- ОК5. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста
- ОК9. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности

– ОК10. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

уметь:

– применять стандартные методы и модели к решению вероятностных и статистических задач;

– использовать расчетные формулы, таблицы, графики при решении статистических задач;

– применять современные пакеты прикладных программ многомерного статистического анализа.

знать:

– элементы комбинаторики;

– понятие случайного события, классическое определение вероятности, вычисление вероятностей событий с использованием элементов комбинаторики, геометрическую вероятность;

– алгебру событий, теоремы умножения и сложения вероятностей, формулу полной вероятности;

– схему и формулу Бернулли, приближенные формулы в схеме Бернулли. формулу (теорему) Байеса;

– понятия случайной величины, дискретной случайной величины, ее распределение и характеристики, непрерывной случайной величины, ее распределение и характеристики;

– законы распределения непрерывных случайных величин;

– центральную предельную теорему, выборочный метод математической статистики, характеристики выборки;

– понятие вероятности и частоты.

Методические указания по внеаудиторной самостоятельной работе являются неотъемлемой частью учебно-методического комплекса и представляют собой дополнение к учебникам и учебным пособиям в рамках изучения дисциплины ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистика.

1.2. Перечень внеаудиторной самостоятельной работы

Раздел/ Тема	Наименование внеаудиторной самостоятельной работы	Форма контроля	Кол. час.
1	2	3	4
Раздел 1			
Тема 1.5 Числовые характеристики дискретной случайной величины	Самостоятельная работа № 1 Вычисление вероятностей для функций от ДСВ	Контроль выполнения домашнего задания и оценка готовности к занятию	1
Тема 1.7 Законы распределения непрерывной случайной величины	Самостоятельная работа № 2 Нахождение характеристик для НСВ, распределенных по нормальному и показательному закону, с помощью функции плотности и интегральной функции распределения	Контроль выполнения домашнего задания и оценка готовности к занятию	1
ИТОГО			2

2. Рекомендации по работе при выполнении заданий

2.1 Методические рекомендации по разработке конспекта лекции

Конспект – краткое изложение существенного содержания информации; вид письменного сообщения; запись мыслей других лиц в свернутой, обобщенной форме, которая впоследствии служит базой для восстановления первоначального материала.

Конспектирование - процесс мысленной переработки и письменной фиксации информации, в виде краткого изложения основного содержания, смысла какого-либо текста.

Для того, что составить конспект лекции необходимо придерживаться следующей последовательности:

- 1) Подобрать необходимую литературу.
- 2) Проанализировать имеющийся материал: выявить незнакомые термины, определить степень сложности материала.
- 3) Разбить материал на части, определить последовательность этих частей.
- 4) Обозначить основные тезисы каждой части.
- 5) Оформить конспект в рабочей тетради с указанием темы.

Критерии оценки конспекта

- 1) Оформление конспекта: выделение заголовков, последовательность изложения материала.
- 2) Умение определить вступление, основную часть, заключение.
- 3) Выделение главной мысли, определение деталей.
- 4) Умение переработать и обобщить информацию.

Оценка «отлично» ставится, если студент выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; правильно и аккуратно выполняет все записи; дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры; правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя, имеющие целью выяснить степень понимания студентом данного материала.

Оценка «хорошо» ставится, если студент выполнил неполно, но правильно изложено задание; при изложении были допущены 1-2 несущественные ошибки, которые он исправляет после замечания преподавателя; дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если студент выполнил работу не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если студент выполнил работу не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов;

2.2 Методические рекомендации по разработке сообщения

Содержимое сообщения представляет информацию и отражает суть вопроса или исследования применительно к данной ситуации.

Цель сообщения – информирование кого-либо о чём-либо. Тем не менее, сообщения могут включать в себя такие элементы как рекомендации, предложения или другие мотивационные предложения.

Порядок подготовки сообщения по теме аналогичен последовательности разработанной для подготовки к конспектированию лекции.

После разработки конспекта сообщения по заданной теме, определяются основные моменты, которые необходимо сообщить остальным студентам.

Выступление с сообщением не должно превышать 5...7 минут. После выступления докладчика предусматривается время для его ответов на вопросы аудитории и для резюме преподавателя.

Критерии оценки сообщения

- 1) Соответствие материала содержанию темы;
- 2) Глубина проработки материала;
- 3) Логичность и последовательность изложения;
- 4) Обоснованность и доказательство выводов;
- 5) Грамотность и полнота использования источников;
- 6) Наличие примеров.

Оценка «отлично» - учебный материал освоен студентом в полном объеме, легко ориентируется в материале, полно и аргументировано отвечает на дополнительные вопросы, излагает материал логически последовательно, делает самостоятельные выводы, умозаключения, демонстрирует кругозор, использует материал из дополнительных источников, интернет ресурсы. Сообщение носит исследовательский характер. Речь характеризуется эмоциональной выразительностью, четкой дикцией, стилистической грамотностью. Использует наглядный материал (презентация).

Оценка «хорошо» - по своим характеристикам сообщение студента соответствует характеристикам отличного ответа, но студент может испытывать некоторые затруднения в ответах на дополнительные вопросы, допускать некоторые погрешности в речи. Отсутствует исследовательский компонент в сообщении.

Оценка «удовлетворительно» - студент испытывал трудности в подборе материала, его структурировании. Пользовался, в основном, учебной литературой, не использовал дополнительные источники информации. Не может ответить на дополнительные вопросы по теме сообщения. Материал излагает не последовательно, не устанавливает логические связи, затрудняется в формулировке выводов. Допускает стилистические ошибки.

Оценка «неудовлетворительно» - сообщение студентом не подготовлено либо подготовлено по одному источнику информации, либо не соответствует теме.

2.3 Методические рекомендации по разработке доклада

Доклад – это вид самостоятельной работы, где автор раскрывает суть исследуемой проблемы, приводит различные точки зрения, а также собственные взгляды на нее.

Доклад требует составления плана, подбора источников, систематизации полученных сведений, выводов, обобщения, объем данной работы составляет до 5 страниц печатного текста.

При подготовке доклада необходимо придерживаться определенной последовательности:

- 1) Подбор и изучение основных источников по теме (не менее 5).
- 2) Обработка и систематизация материала, разделение и систематизация материала в необходимой последовательности;
- 3) Подготовка выводов и обобщений;
- 4) Разработка плана доклада;
- 5) Написание доклада;
- 6) Выступление с результатами доклада.
- 7) Последний пункт может варьироваться в зависимости от требований преподавателя (доклад может быть письменный и устный).

Критерии оценки доклада

- 1) Соответствие материала содержанию темы;
- 2) Глубина проработки материала;
- 3) Логичность и последовательность изложения;
- 4) Обоснованность и доказательство выводов;
- 5) Грамотность и полнота использования источников;
- 6) Наличие примеров.

Оценка «отлично» ставится, в случае если выполнены все требования к написанию и защите доклада: обозначена проблема и обоснована её актуальность, сделан краткий анализ различных точек зрения на рассматриваемую проблему и логично изложена собственная позиция, сформулированы выводы, тема раскрыта полностью, выдержан объём, соблюдены требования к внешнему оформлению, даны правильные ответы на дополнительные вопросы. Речь характеризуется эмоциональной выразительностью, четкой дикцией, стилистической грамотностью. Использует наглядный материал (презентация).

Оценка «хорошо» – основные требования к докладу и его защите выполнены, но при этом допущены недочёты. В частности, имеются неточности в изложении материала; отсутствует логическая последовательность в суждениях; не выдержан объём; имеются упущения в оформлении; на дополнительные вопросы при защите даны неполные ответы.

Оценка «удовлетворительно» – имеются существенные отступления от требований. В частности, тема освещена лишь частично; допущены фактические ошибки в содержании или при ответе на дополнительные вопросы; во время защиты отсутствует вывод.

Оценка «неудовлетворительно» – тема не раскрыта, обнаруживается существенное непонимание проблемы.

2.4 Методические рекомендации по подготовке реферата

Реферат – это один из самых сложных видов самостоятельной работы с книгой. Подготовка реферата и выступление с его изложением углубляет знания, расширяет кругозор, приучает логически, творчески мыслить, развивать культуру речи.

Реферат – одна из форм интерпретации исходного текста или нескольких источников. Поэтому реферат, в отличие от конспекта, является новым, авторским

текстом. Новизна в данном случае подразумевает новое изложение, систематизацию материала, особую авторскую позицию при сопоставлении различных точек зрения.

Реферат - письменная работа объемом 10-15 печатных страницы, выполняемая студентом в течение длительного срока (от одной недели до месяца).

Реферат, как и доклад состоит из нескольких частей:

- 1) Титульный лист (см. приложение А).
- 2) Содержание (в нем последовательно указываются пункты доклада, страницы, с которых начинается каждый пункт).
- 3) Введение (формулируется суть рассматриваемой проблемы, обосновывается актуальность и значимость темы в современном мире).
- 4) Основная часть (основная часть состоит из нескольких разделов, каждый из которых последовательно раскрывает тему реферата, утверждения подтверждаются доказательствами).
- 5) Заключение (подводятся итоги или делается обобщенный вывод по теме реферата).
- 6) Список литературы.

Требования к оформлению реферата

Объемы рефератов колеблются от 5...10 печатных страниц. Работа выполняется на одной стороне листа формата А4. Рекомендуется шрифт Times New Roman 14, интервал – 1,5. Таблицы оформляются шрифт Times New Roman 12, интервал – 1. Все листы реферата должны быть пронумерованы. Каждый вопрос в тексте должен иметь заголовок в точном соответствии с наименованием в плане-оглавлении.

Критерии оценки реферата

- знание фактического материала, усвоение общих представлений, понятий, идей;
- правильность формулирования цели, определения задач исследования, соответствие выводов решаемым задачам, поставленной цели, убедительность выводов;
- всесторонность раскрытия темы, логичность и последовательность изложения материала, корректность аргументации и системы доказательств, характер и достоверность примеров, иллюстративного материала;
- использование литературных источников; – культура письменного изложения материала;
- культура оформления материалов работы.

Оценка «отлично» ставится, если выполнены все требования к написанию и защите реферата: обозначена проблема и обоснована её актуальность, сделан краткий анализ различных точек зрения на рассматриваемую проблему и логично изложена собственная позиция, сформулированы выводы, тема раскрыта полностью, выдержан объём, соблюдены требования к внешнему оформлению, даны правильные ответы на дополнительные вопросы.

Оценка «хорошо» – основные требования к реферату и его защите выполнены, но при этом допущены недочёты. В частности, имеются неточности в изложении материала; отсутствует логическая последовательность в суждениях; не выдержан объём реферата; имеются упущения в оформлении; на дополнительные вопросы при защите даны неполные ответы.

Оценка «удовлетворительно» – имеются существенные отступления от требований к реферированию. В частности, тема освещена лишь частично; допущены фактические ошибки в содержании реферата или при ответе на дополнительные вопросы; во время защиты отсутствует вывод.

Оценка «неудовлетворительно» – тема реферата не раскрыта, обнаруживается существенное непонимание проблемы.

2.5 Методические рекомендации по подготовке презентации

Электронная презентация (видео материалы) – это набор слайдов, призванных быстро и эффективно донести до аудитории некоторую информацию. Презентация позволяет дополнять информацию изображениями и спецэффектами. Всё это повышает интерес слушателей представляемой информации и эффективность восприятия.

Вся работа по созданию презентаций организуется в несколько этапов.

- 1) Сбор и изучение информации по теме.
- 2) Выделение ключевых понятий.
- 3) Структурирование текста на отдельные смысловые части.

Объём презентации ограничивается 10 слайдами. Составление сценария презентации предполагает обдумывание содержания каждого слайда, его дизайна. Создание слайдов предполагает внесение текстовой информации, а затем поиск и размещение необходимых иллюстраций, схем, фотографий, графических элементов. Важно обращать внимание на особенности визуального восприятия расположенных на слайде объектов. Размер букв, цифр, знаков, их контрастность определяются необходимостью их четкого рассмотрения с любого места аудитории, предпочтение отдавать спокойным цветам фона. Иллюстрационные материалы располагают так, чтобы они максимально равномерно заполняли все экранное поле. Текстовой информации должно быть очень немного, желательно использовать приемы выделения значимых терминов, понятий. Анимация не должна быть слишком активной.

Критерии оценки презентации

Оценка «отлично» ставится, если работа соответствует проблемному вопросу и раскрывает часть основного вопроса; демонстрирует глубокое понимание описываемых процессов, содержание полностью раскрывает поставленную цель, демонстрирует глубокое понимание описываемых процессов; предлагает собственную интерпретацию или развитие темы (обобщения, приложения, аналогии); указаны пути решения проблемы; дизайн логичен и очевиден; нет ошибок: ни грамматических, ни синтаксических, ни речевых.

Оценка «хорошо» ставится, если работа соответствует проблемному вопросу; почти полностью сделаны наиболее важные компоненты работы; работа демонстрирует понимание основных моментов, хотя некоторые детали не уточняются; содержание раскрывает цель, но с небольшими моментами, которые не уточняются; указаны не все пути решения проблемы; Имеются постоянные элементы дизайна. Дизайн соответствует содержанию. Минимальное количество ошибок.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа не совсем соответствует проблемному вопросу; не все важнейшие компоненты работы выполнены; содержание раскрывает цель, но не полностью; пути решения проблемы указаны некорректно; дизайн случайный; есть ошибки, мешающие восприятию.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если содержание не раскрывает цель; работа сделана фрагментарно и демонстрирует минимальное понимание; элементы дизайна мешают содержанию, накладываясь на него; много ошибок, делающих материал трудночитаемым.

Содержание внеаудиторной самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа №1

Вычисление вероятностей для функций от ДСВ

Цель работы: научиться определять математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины по заданному распределению;

Время выполнения: 45 минут.

Ход выполнения самостоятельной работы

Самостоятельные работы необходимо выполнять в специальных тетрадях с указанием номера, темы, целей работы.

1. Познакомиться с теоретическим материалом.
2. В тетрадях для самостоятельных работ выполнить задания по варианту, ответить на контрольные вопросы.
3. Сдать преподавателю тетрадь для самостоятельных работ.

Краткая теория и методические рекомендации

1. Математическое ожидание случайной величины X определяется по формуле:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Пример 1. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная ее закон распределения.

X	3	5	2
p	0,1	0,6	0,3

Решение

$$M(X) = 3 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,3 = 3,9$$

Пример 2. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

X	5	2	4
P	0,6	0,1	0,3

Y	7	9
P	0,8	0,2

Найти математическое ожидание случайной величины XY.

Решение.

$$M(X) = 5 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,3 = 4,4$$

$$M(Y) = 7 \cdot 0,8 + 9 \cdot 0,2 = 7,4$$

$$M(XY) = 4,4 \cdot 7,4 = 32,56$$

Пример 3. Производится 3 выстрела с вероятностями попадания в цель, равными $p_1 = 0,4$; $p_2 = 0,3$; $p_3 = 0,6$. Найти математического ожидание общего числа попаданий.

Решение. Число попаданий при первом выстреле есть случайная величина X_1 , которая может принимать только два значения: 1 – попадание с вероятностью 0,4 и 0 – промах с вероятностью 0,6.

$$M(X_1) = 0,4$$

$$\text{Аналогично } M(X_2) = 0,3; M(X_3) = 0,6.$$

Общее число попаданий есть случайная величина, состоящая из суммы попаданий в каждом из выстрелов: $X = X_1 + X_2 + X_3$.

$$M(X) = M(X_1 + X_2 + X_3) = M(X_1) + M(X_2) + M(X_3) = 1,3 \text{ попаданий.}$$

Пример 4. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия $p = 0,6$. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

Решение. Попадание при каждом выстреле не зависит от исходов других выстрелов, поэтому рассматриваемые события независимы и, следовательно, искомое математическое ожидание $M(X) = np = 10 * 0,6 = 6$ попаданий.

2. Дисперсия случайной величины определяется по формуле:

$$D(X) = M(x - M(X))^2 \text{ или } D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

Пример 5. Найти дисперсию случайной величины X , которая задана следующим законом распределения:

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

Решение. Найдем математическое ожидание $M(X)$: $M(X) = 2 * 0,1 + 3 * 0,6 + 5 * 0,3 = 3,5$

$$\text{Математическое ожидание } M(X^2) = 4 * 0,1 + 9 * 0,6 + 25 * 0,3 = 13,3$$

$$\text{Искомая дисперсия: } D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 13,3 - (3,5)^2 = 1,05$$

3. Среднее квадратичное отклонение случайной величины определяется по формуле: $\delta(X) = \sqrt{D(X)}$

Практическая часть

Вариант 1

1. Производится три выстрела с вероятностями попадания в цель, равными $p_1 = 0,7$; $p_2 = 0,8$ и $p_3 = 0,6$. Найти математическое ожидание общего числа попаданий.

2. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X , которая задана следующим законом распределения:

X	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2

3. Случайная величина X может принимать два возможных значения: x_1 с вероятностью 0,3 и x_2 с вероятностью 0,7, причем x_1 меньше x_2 . Найти x_1 и x_2 , зная, что $M(X) = 2,7$ и $D(X) = 0,21$.

4. Дискретная случайная величина X принимает 3 возможных значения: $x_1 = 6$ с вероятностью $p_1 = 0,5$, $x_2 = 4$ с вероятностью $p_2 = 0,3$ и x_3 с вероятностью p_3 . Найти x_3 и p_3 , зная, что $M(X) = 12$.

5. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины, заданной законом распределения.

У	2	4	5	6
Р	0,1	0,3	0,2	0,4

Вариант 2

1. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при бросании двух игральных костей.

2. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X , которая задана следующим законом распределения:

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

3. Случайная величина X может принимать два возможных значения: $x_1=4$ с вероятностью p_1 и $x_2 = 6$ с вероятностью p_2 . Найти p_1 и p_2 , зная, что $M(X)=10,8$ и $D(X)=0,84$.

4. Дискретная случайная величина X принимает 3 возможных значения: $x_1=8$ с вероятностью $p_1=0,2$, $x_2=6$ с вероятностью $p_2=0,4$ и x_3 с вероятностью p_3 . Найти x_3 и p_3 , зная, что $M(X)=20$.

5. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины, заданной законом распределения.

X	1	3	6	8
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Контрольные вопросы

1. Дайте определение математического ожидания случайной величины.
2. Что называется дисперсией случайной величины?
3. Запишите формулу вычисления математического ожидания случайной величины.
4. Запишите формулу вычисления дисперсии случайной величины.
5. Свойства математического ожидания случайной величины.
6. Свойства дисперсии случайной величины.
7. Дайте определение среднего квадратического отклонения.
8. Запишите формулу вычисления среднего квадратического отклонения.
9. Способы задания закона распределения дискретной случайной величины.
10. Определение биномиального закона распределения.
11. Формула биномиального закона распределения дискретной случайной величины.

Критерии оценивания самостоятельной работы

Оценка «5» ставится, если верно и рационально решено 90%-100% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет, неискажающий сути решения.

Оценка «4» ставится при безошибочном решении 80% предлагаемых заданий.

Оценка «3» ставится, если выполнено 70% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет.

Оценка «2» - решено мене 50% предлагаемых заданий.

Самостоятельная работа №2

Нахождение характеристик для НСВ, распределенных по нормальному и показательному закону, с помощью функции плотности и интегральной функции распределения

Цель работы: научиться определять характеристики непрерывных случайных величин.

Время выполнения: 45 минут.

Ход выполнения самостоятельной работы

Самостоятельные работы необходимо выполнять в специальных тетрадях с указанием номера, темы, целей работы.

1. Познакомиться с теоретическим материалом.
2. В тетрадях для самостоятельных работ выполнить задания по варианту, ответить на контрольные вопросы.
3. Сдать преподавателю тетрадь для самостоятельных работ.

Краткая теория и методические рекомендации

Для непрерывной случайной величины можно определить следующие числовые характеристики:

Математическое ожидание – средневзвешенное по вероятностям значение случайной величины.

$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ - если возможные значения X принадлежат всей числовой прямой.

Мода – наиболее вероятное значение случайной величины X .

Дисперсия – характеризует разброс случайной величины вокруг ее математического ожидания.

$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - (M(x))^2$ - если возможные значения X принадлежат интервалу $[a, b]$

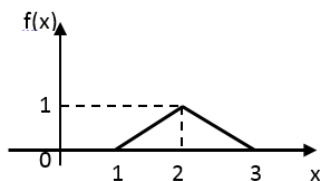
$$D(X) = M(x^2) - (M(x))^2$$

Среднее квадратичное отклонение - $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$.

Рассмотрим примеры определения числовых характеристики непрерывных случайных величин.

Пример 1. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения. Найти математическое ожидание.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ x - 1 & \text{при } 1 \leq x < 2, \\ -x + 3 & \text{при } 2 \leq x < 3, \\ 0 & \text{при } x \geq 3. \end{cases}$$



Решение

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^1 0dx + \int_1^2 x(x-1)dx + \int_2^3 x(-x+3)dx + \int_3^{\infty} 0dx = (x^3/3 - x^2/2) \Big|_1^2 + (3x^2/2 - x^3/3) \Big|_2^3 = \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \right] - \left[\left(\frac{3 \cdot 9}{2} - \frac{27}{3} \right) - \left(\frac{3 \cdot 4}{2} - \frac{8}{3} \right) \right] = 2.$$

Пример 2. Случайная величина X задана плотностью распределения.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0,5 \sin x, & x \in (0; \pi), \\ 0, & x \geq \pi \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и моду.

Решение

Математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 0,5 \int_0^{\pi} x \sin x dx.$$

Для нахождения интеграла используем формулу интегрирование по частям.

$$U = x \quad dU = dx \quad \int_a^b U dV = UV \Big|_a^b - \int_a^b V dU$$

$$dV = \sin x dx \quad V = -\cos x$$

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = x(-\cos x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) dx = [\pi(-\cos \pi) - 0] + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi + (\sin \pi - \sin 0) = \pi$$

$$M(X) = 0,5 \int_0^{\pi} x \sin x dx = 0,5 * \pi = \frac{\pi}{2}.$$

Мода:

$$(0,5 \sin x)' = 0,5 \cos x$$

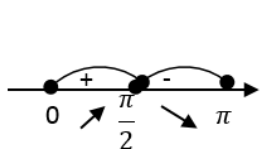
$$0,5 \cos x = 0$$

$\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ – критические точки данной функции на всей

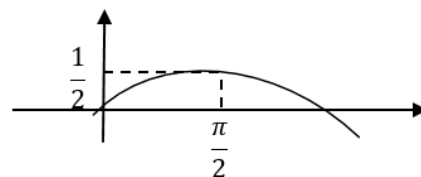
числовой прямой

$x = \frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$ – критическая точка в рассматриваемом интервале

Проверим точку $x = \frac{\pi}{2}$ на максимум:



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{6}$
y	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$



Т.к. в точке $x = \frac{\pi}{2}$ производная меняет знак с “+” на “-“, то в этой точке плотность вероятности будет максимальна.

$$\text{Мода: } m = \frac{\pi}{2}$$

Пример 3. Случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < -1 \\ 3x^2, & \text{при } -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

Найти дисперсию и среднее квадратичное отклонение этой случайной величины.

Решение

$$1. \text{ Найдем математическое ожидание: } M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-1}^0 3x^3 dx = 3x^4/4 \Big|_{-1}^0 = -3/4.$$

2. Определим дисперсию.

$$D(X) = \int_{-1}^0 x^2 * 3x^2 dx - (-3/4)^2 = \int_{-1}^0 3x^4 dx - 9/16 = 3 \int_{-1}^0 x^4 dx - 9/16 = \frac{3x^5}{5} \Big|_{-1}^0 - \frac{9}{16} = \left(0 - \frac{3*(-1)^5}{5}\right) - \frac{9}{16} = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = 0.6 - 0.5625 = 0,0375.$$

3. Среднее квадратичное отклонение: $\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{0,0375} = 0,19$

Среди непрерывных случайных величин особого внимания заслуживают величины, имеющие один из следующих законов распределения: равномерный, показательный, нормальный.

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

где μ – математическое ожидание; σ – среднеквадратичное отклонение.

Вероятность попадания в интервал нормально распределенной случайной величины равна:

$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$, где Φ – функция Лапласа (определяется по таблице)

Пример 1. Время загрузки Web-страницы распределено нормально, причем его математическое ожидание равно $\mu = 7$ с, а стандартное отклонение $\sigma = 2$ с. Определите вероятность того, что время загрузки лежит в интервале 7 – 9 секунд.

Решение

По условию, $\alpha = 7$, $\beta = 9$, $\mu = 7$, $\sigma = 2$. Следовательно,

$$P(7 < X < 9) = \Phi\left(\frac{9-7}{2}\right) - \Phi\left(\frac{7-7}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(0) = 0,3413 - 0 = 0,3413.$$

Распределение вероятностей называют **равномерным**, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность вероятности постоянна.

Плотность равномерного распределения $f(x)$ определяется формулой:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq a \\ \frac{1}{b-a}, & \text{при } a < x \leq b \\ 0, & \text{при } x > b \end{cases}$$

Вероятность попадания в интервал равномерно распределенной случайной величины

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

Пример 2. Известно, что передатчик может начать работу в любой момент времени между 12 и 14 часами. Какова вероятность того, что начало передачи придется ждать не более 15 минут (0,25 часа).

Решение. Пусть X (ч) – время начала работы передатчика. Поскольку передача может начаться в любой момент между 12 и 14 часами и все моменты равновозможны, то X – случайная величина распределенная равномерно.

$$\alpha = 12, \beta = 12,25, a = 12, b = 14$$

$$P(12 < x < 12,25) = \frac{12,25 - 12}{14 - 12} = \frac{0,25}{2} = 0,125$$

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X , которое описывается плотностью:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}, \text{ где } \lambda - \text{ постоянная положительная величина}$$

Функция показательного распределения определяется формулой:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

Пример 3. Написать плотность, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию показательного закона, если параметр $\lambda = 8$.

Решение

Искомая плотность распределения равна:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ 8e^{-8x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ 1 - e^{-8x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

Математическое ожидание $M(x) = 1/\lambda = 1/8$

Дисперсия $D = 1/\lambda^2 = 1/64$

Практическая часть

Вариант 1

1. Математическое ожидание нормально распределенной величины X равно 3 и среднее квадратическое отклонение 2. Написать плотность вероятности X .

2. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию X .

3. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda=4$.

4. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного распределения, заданного функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-0.1x}$ ($x \geq 0$).

5. Найти математическое ожидание показательного распределения, заданного при $x \geq 0$ плотностью распределения $f(x) = 5e^{-5x}$.

Вариант 2

1. Математическое ожидание нормально распределенной величины X равно 9 и среднее квадратическое отклонение 6. Написать плотность вероятности X .

2. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью $f(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-173)^2}{72}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию X .

3. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda=6$.

4. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного распределения, заданного функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-3x}$ ($x \geq 0$).

5. Найти математическое ожидание показательного распределения, заданного при $x \geq 0$ функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-0.1x}$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение нормального распределения.
2. Запишите формулу плотности нормального распределения.
3. Дайте определение показательного распределения.
4. Запишите формулу плотности показательного распределения.
5. Дайте определение и запишите формулу функции показательного распределения.

Критерии оценивания самостоятельной работы

Оценка «5» ставится, если верно и рационально решено 90%-100% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет, неискажающий сути решения.

Оценка «4» ставится при безошибочном решении 80% предлагаемых заданий.

Оценка «3» ставится, если выполнено 70% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет.

Оценка «2» - решено менее 50% предлагаемых заданий.

3. Информационное обеспечение обучения

Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

Основные источники

1. Малугин, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. и практикум для СПО / В.А. Малугин. – М. : Юрайт, 2018. – 470 с.
2. Спирина, М.С. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. для студентов учреждений сред. проф. образования / М. С. Спирина, П.А. Спирин. – 3-е изд., стер. – М. : Академия, 2018. – 352 с.
3. Спирина, М.С. Теория вероятностей и математическая статистика. Сборник задач [Текст] : учеб. пособие для студентов учреждений сред. проф. образования / М.С. Спирина, П.А. Спирин. – М. : Академия, 2017. – 184 с.

Дополнительные источники

1. Григорьев, В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для студентов учрежд. СПО / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 160 с.
2. Пехлецкий, И.Д. Математика: учеб. для студ. образовательных учреждений сред. проф. образования / И.Д. Пехлецкий. - М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 304 с.
3. Гутова, С.Г. Теория вероятностей и математическая статистика : электронный сборник тестов [Электронный ресурс] / С.Г. Гутова ; – Кемерово : Кемеровский государственный университет, 2015. - 74 с. – Режим доступа : <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=482910>

Интернет-ресурсы:

1. Математический портал [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.allmath.ru/mathan.htm>.
2. Образовательные ресурсы сети Интернет [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://katalog.iot.ru>.
3. Образовательные ресурсы Интернета - школьникам и студентам [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://alleng.ru/edu/educ.htm>.
4. Теория, формулы, тесты и задачи по физике и математике [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://educon.by>.
5. Федеральный портал «Российское образование» [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://edu.ru>.