

Департамент внутренней и кадровой политики Белгородской области
Областное государственное автономное профессиональное
образовательное учреждение
«Белгородский индустриальный колледж»

Рассмотрено
цикловой комиссией
Протокол заседания № 1
от «31» августа 2020г.
Председатель цикловой комиссии
_____ /Чобану Л.А./

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических работ
по дисциплине
ЕН.01 «МАТЕМАТИКА»

по специальности
10.02.04 Обеспечение информационной безопасности
телекоммуникационных систем

Разработчик:
преподаватель ОГАПОУ
«Белгородский индустриальный колледж»
Шатилов В.А.

Белгород 2020г.

Содержание

1. Пояснительная записка	3
1.1.Краткая характеристика дисциплины, ее цели и задачи. Место практических работ в курсе дисциплины	3
1.2.Организация и порядок проведения практических работ	3
1.3.Общие указания по выполнению практических работ	3
1.4.Критерии оценки результатов выполнения практических работ	4
2. Тематическое планирование практических работ	5
3. Содержание практических работ	7
Практическая работа №1 Операции над матрицами	7
Практическая работа №2 Решение систем линейных уравнений	10
Практическая работа №3 Действия над комплексными числами.	14
Практическая работа №4 Вычисление простых пределов	17
Практическая работа №5 Вычисление пределов с помощью замечательных	20
Практическая работа №6 Вычисление производной сложной функции	25
Практическая работа №7 Исследование функций с помощью производной	28
Практическая работа №8 Нахождение неопределенных интегралов табличным методом и методом подстановки	31
Практическая работа №9 Вычисление определенного интеграла	35
Практическая работа №10 Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными	38
Практическая работа №11Решение дифференциальных уравнений первого порядка	40
Практическая работа №12Применение основных формул при решении задач.	41
4. Информационное обеспечение обучения	44

1. Пояснительная записка

1.1. Краткая характеристика дисциплины ЕН.01 «Математика», ее цели и задачи. Место практических работ в курсе дисциплины ЕН.01 «Математика»

Дисциплина ЕН.01 «Математика» является частью рабочей основной образовательной программы в соответствии с ФГОС по специальности СПО 10.02.04 Обеспечение информационной безопасности телекоммуникационных систем

Дисциплина изучается в III семестре. В целом рабочей программой предусмотрено 24 часа на выполнение практических работ, что составляет 38% от обязательной аудиторной нагрузки, которая составляет 64 часа, при этом максимальная нагрузка составляет 666 часов, из них 2 часа приходится на самостоятельную работу обучающихся.

Цель настоящих методических рекомендаций: оказание помощи обучающимся в выполнении практических работ по дисциплине ЕН.01 «Математика», качественное выполнение которых поможет обучающимся освоить обязательный минимум содержания дисциплины и подготовиться к промежуточной аттестации в форме дифференцированного зачета.

1.2. Организация и порядок проведения практических работ

Практические работы проводятся после изучения теоретического материала. Введение практических работ в учебный процесс служит связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, а также для получения практических навыков и умений. При проведении практических работ задания, выполняются студентом самостоятельно, с применением знаний и умений, усвоенных на предыдущих занятиях, а также с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя. Обучающиеся должны иметь методические рекомендации по выполнению практических работ, конспекты лекций, измерительные и чертежные инструменты, средство для вычислений.

1.3. Общие указания по выполнению практических работ

Курс практических работ по дисциплине ЕН.01 «Математика» предусматривает проведение 12 работ, посвященных изучению:

- Определителей и систем линейных уравнений;
- Основ теории комплексных чисел;
- Теории пределов;
- Дифференциального исчисления;
- Интегрального исчисления;
- Обыкновенных дифференциальных уравнений;
- Элементов теории вероятностей и математической статистики.

При подготовке к проведению практической работы необходимо:

- ознакомиться с целями проведения практической работы;
- ознакомиться с порядком выполнения работы.

После выполнения практической работы обучающийся к следующему занятию оформляет отчет, который должен содержать:

- название практической работы, ее цель;
- краткие, теоретические сведения об изучаемой теме;
- все необходимые, предусмотренные практической работой, расчеты;
- выводы по итогам работы;
- ответы на контрольные вопросы.

1.4. Критерии оценки результатов выполнения практических работ

Критериями оценки результатов работы обучающихся являются:

- уровень усвоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач;
- сформированность общих и профессиональных компетенций:

ОК 1 Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, обладать высокой мотивацией к выполнению профессиональной деятельности в области обеспечения информационной безопасности.

ОК 2 Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3 Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4 Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5 Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 8 Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9 Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Участвовать в сборе и обработке материалов для выработки решений по обеспечению защиты информации и эффективному использованию средств обнаружения возможных каналов утечки конфиденциальной информации.

ПК 1.4 Участвовать во внедрении разработанных организационных решений на объектах профессиональной деятельности.

ПК 1.8 Проводить контроль соблюдения персоналом требований режима защиты информации.

ПК 2.3 Организовывать документооборот, в том числе электронный, с учетом конфиденциальности информации.

ПК 3.1 Применять программно-аппаратные и технические средства защиты информации на защищаемых объектах.

ПК 3.2 Участвовать в эксплуатации систем и средств защиты информации защищаемых объектов.

- обоснованность и четкость изложения материала;
- уровень оформления работы;
- анализ результатов.

Критерии оценивания практической работы

Оценка	Критерии оценивания
5	Работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности проведения, содержит результаты и выводы, все записи, таблицы, рисунки, чертежи, графики выполнены аккуратно. Обучающийся владеет теоретическим материалом, формулирует собственные, самостоятельные, обоснованные, представляет полные и развернутые ответы на дополнительные вопросы.
4	Работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности проведения, содержит результаты и выводы, все записи, таблицы, рисунки, чертежи, графики выполнены аккуратно. Обучающийся владеет теоретическим материалом, допуская незначительные ошибки на дополнительные вопросы.
3	Работа выполнена в полном объеме, содержит результаты и выводы, все записи, таблицы, рисунки, чертежи, графики выполнены аккуратно. Обучающийся владеет теоретическим материалом на минимально допустимом уровне, допуская ошибки на дополнительные вопросы.
2	Работа выполнена не полностью. Студент практически не владеет теоретическим материалом, допускает ошибки при ответе на дополнительные вопросы.

2. Тематическое планирование практических работ

	Наименование тем	Вид и название работы студента	Количество часов на выполнение работы
Раздел 1	Определители и системы линейных уравнений		4
1.3	Операции над матрицами. Нахождение обратной матрицы	Практическая работа №1 Операции над матрицами	2
1.4	Системы линейных уравнений	Практическая работа №2 Решение систем линейных уравнений	2
Раздел 2	Основы теории комплексных чисел		2
2.1	Комплексные числа. Арифметические действия над комплексными числами.	Практическая работа №3 Арифметические действия над комплексными числами	2
Раздел 3	Теория пределов		4
3.1	Предел функции. Основные теоремы о пределах	Практическая работа №4 Вычисление простых пределов	2
3.3	Вычисление пределов с помощью замечательных	Практическая работа №5 Вычисление пределов с помощью замечательных	2
Раздел 4	Дифференциальное исчисление		4
4.2	Дифференциал функции. Производная сложной функции	Практическая работа №6 Вычисление производной сложной функции	2
4.3	Применение производной к исследованию функций	Практическая работа №7 Исследование функций с помощью производной	2
Раздел 5	Интегральное исчисление		4
5.2	Неопределенный интеграл, свойства. Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, введение новой переменной	Практическая работа №8 Нахождение неопределенных интегралов табличным методом и методом подстановки	2
5.4	Определенный интеграл. Методы вычисления определенного интеграла	Практическая работа №9 Вычисление определенного интеграла	2
Раздел 6	Обыкновенные дифференциальные уравнения		2
6.2	Решение дифференциальных уравнений	Практическая работа №10 Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.	4
		Практическая работа №11 Решение дифференциальных уравнений первого порядка	

Раздел 7.	Элементы теории вероятностей и математической статистики		
7.1	Основные определения и теоремы. События как результат испытания. Частота и вероятность события. Элементы комбинаторики.	Практическая работа №12 Применение основных формул при решении задач.	
		Итого:	22

3. Содержание практических работ Практическая работа №1

Тема: Операции над матрицами

Цель: отработка умений и навыков выполнения действий с матрицами, вычисления определителей.

Время на выполнение: 2 часа.

Основные теоретические сведения

Матрица– это прямоугольная таблица каких-либо элементов. В качестве элементов мы будем рассматривать числа, то есть числовые матрицы. ЭЛЕМЕНТ– это термин. Термин желательно запомнить, он будет часто встречаться.

Обозначение: матрицы обычно обозначают прописными латинскими буквами A, B, C, \dots

Действия с матрицами:

1) Вынесение минуса из матрицы (внесение минуса в матрицу).

Вынесем минус за пределы матрицы, сменив у КАЖДОГО элемента матрицы знак:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & -7 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 7 \\ -6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Внесем минус в матрицу, сменив у КАЖДОГО элемента матрицы знак:

$$E = - \begin{pmatrix} -4 & 13 & -6 \\ -17 & 5 & 7 \\ -3 & -4 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -13 & 6 \\ 17 & -5 & -7 \\ 3 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

2) Умножение матрицы на число.

Пример:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 12 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 7 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -3 \\ 21 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример:

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 14 & 8 \\ -10 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Транспонирование матрицы

Для того чтобы транспонировать матрицу, нужно ее строки записать в столбцы транспонированной матрицы.

Пример:

Транспонировать матрицу $D = (7 \ 3 \ -12 \ 0 \ 34)$

Строка здесь всего одна и, согласно правилу, её нужно записать в столбец:

$$D^T = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -12 \\ 0 \\ 34 \end{pmatrix} \text{ – транспонированная матрица.}$$

4) Сумма (разность) матриц.

Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы:

$$F + G = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+(-4) & -1+(-3) \\ -5+15 & 0+7 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 12-4 & -1-3 \\ -5+15 & 0+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Для разности матриц правило аналогичное, **необходимо найти разность соответствующих элементов.**

5) Умножение матриц.

Чтобы матрицу K можно было умножить на матрицу L необходимо, чтобы число столбцов матрицы K равнялось числу строк матрицы L .

Пример:

$$PS = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 + 8 \cdot 4 - 4 \cdot 9 & 5 \cdot 2 + 8 \cdot (-1) - 4 \cdot 6 & 5 \cdot 5 + 8 \cdot 3 - 4 \cdot 5 \\ 6 \cdot 3 + 9 \cdot 4 - 5 \cdot 9 & 6 \cdot 2 + 9 \cdot (-1) - 5 \cdot 6 & 6 \cdot 5 + 9 \cdot 3 - 5 \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 + 7 \cdot 4 - 3 \cdot 9 & 4 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) - 3 \cdot 6 & 4 \cdot 5 + 7 \cdot 3 - 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$$

Внимание! Понятия квадрата матрицы не существует!

Если для матрицы A необходимо вычислить A^2 , то это означает, что необходимо выполнить действие $A \cdot A$.

Вычисление определителей

Определитель можно вычислить только для квадратной матрицы!

На практике чаще всего можно встретить определитель второго порядка, например:

Обозначения: Если дана матрица $A = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -15 & -2 \end{pmatrix}$, то ее определитель обозначают $|A|$. Также очень часто определитель обозначают латинской буквой D или греческой Δ .

Начнем с определителя «два» на «два»:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Сразу рассмотрим пример:

$$\begin{vmatrix} 11 & -3 \\ -15 & -2 \end{vmatrix} = 11 \cdot (-2) - (-15) \cdot (-3) = -22 - 45 = -67$$

Самое главное, НЕ ЗАПУТАТЬСЯ В ЗНАКАХ.

Определитель матрицы «три на три»

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = \\ = (0 \cdot 9 - 8 \cdot 6) + 2 \cdot (4 \cdot 9 - (-7) \cdot 6) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - (-7) \cdot 0) = \\ = 0 - 48 + 2 \cdot (36 + 42) + 3 \cdot (32 - 0) = -48 + 156 + 96 = 204$$

Задания для выполнения практической работы:

Вариант №1

Задание №1.

Найти линейные комбинации матриц.

$$A - \lambda E, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задание №2.

Найти произведения матриц АВ и ВА (если они существуют).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задание №3.

Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 3, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание №4.

Найти матрицу, обратную к данной: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$

Вариант №2

Задание №1.

Найти линейные комбинации матриц.

$$4A - 5B, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Задание №2.

Найти произведения матриц АВ и ВА (если они существуют).

$$A = (4 \ 0 \ -2 \ 3 \ 1), B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Задание №3.

Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2, A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задание №4.

Найти матрицу, обратную к данной: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$

Форма отчетности и контроля: задания с решением, оценка.

Практическая работа №2

Тема: Решение систем линейных уравнений

Цель: отработка умений и навыков решения систем линейных уравнений.

Время на выполнение: 2 часа.

Основные теоретические сведения

Решение системы по формулам Крамера

Для того чтобы выполнить данное задание Вы должны уметь раскрывать определители «два на два» и «три на три».

Пример. Решить систему по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Решение: Решим систему по формулам Крамера

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-4 - 2) + 2 \cdot (-3 + 4) + 4 \cdot (-3 - 8) = -18 + 2 - 44 = -60 \neq 0,$$

значит, система имеет единственное решение.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 21 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 21 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 21 \cdot (-4 - 2) + 2 \cdot (-9 + 20) + 4 \cdot (-9 - 40) = -126 + 22 - 196 = -300$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-300}{-60} = 5$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 2 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} - 21 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-9 + 20) - 21 \cdot (-3 + 4) + 4 \cdot (30 - 18) = 33 - 21 + 48 = 60$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{60}{-60} = -1$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 21 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (40 + 9) - 3 \cdot (-20 + 21) + 2 \cdot (-18 - 84) = 147 - 3 - 284 = -60$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-60}{-60} = 1$$

Ответ: $x_1 = 5, x_2 = -1, x_3 = 1$.

Матричный метод решения СЛУ

Рассматриваем систему уравнений
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$
 Для нее

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Здесь: A – матрица коэффициентов, X – столбец неизвестных, B – столбец свободных членов.

Теорема. Если определитель матрицы A отличен от нуля ($\Delta(A) \neq 0$), то система (1) имеет единственное решение, определяемое равенством $X = A^{-1} \cdot B$, где A^{-1} – обратная матрица.

Пример: решаем ту же систему уравнений, которую решали методом Крамера

$$\begin{cases} 2x + 4y - z = 3 \\ -x + 3y + 2z = 7 \\ 3x + 2y - 2z = -3 \end{cases}$$

1) Составляем матрицы A и B:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

2) Ищем алгебраические дополнения для составления обратной матрицы:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -10 \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{31} = + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{13} = + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -11 \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 \quad A_{33} = + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 10$$

3) Определитель: $\Delta(A) = 7$ (см. метод Крамера)

4) Тогда решение системы:

$$X = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -10 & 6 & 11 \\ 4 & -1 & -3 \\ -11 & 8 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -10 \cdot 3 + 6 \cdot 7 + 11 \cdot (-3) \\ 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 7 + (-3) \cdot (-3) \\ (-11) \cdot 3 + 8 \cdot 7 + 10 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -21 \\ 14 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

т.е. $x = -3$; $y = 2$; $z = -1$

Ответ: $(-3; 2; -1)$

Решение системы методом Гаусса

Метод Гаусса, называемый также методом последовательного исключения неизвестных, состоит в следующем. При помощи элементарных преобразований систему линейных уравнений приводят к такому виду, чтобы её матрица из коэффициентов оказалась *трапецевидной* (то же самое, что треугольной или ступенчатой).

Преимущества метода:

1. при решении систем линейных уравнений с числом уравнений и неизвестных более трёх метод Гаусса не такой громоздкий, как метод Крамера, поскольку при решении методом Гаусса необходимо меньше вычислений;
2. методом Гаусса можно решать неопределённые системы линейных уравнений, то есть, имеющие общее решение, а, используя метод Крамера, можно лишь констатировать, что система неопределённа;
3. можно решать системы линейных уравнений, в которых число неизвестных не равно числу уравнений;

4. метод основан на элементарных (школьных) методах - методе подстановки неизвестных и методе сложения уравнений.

Расширенная матрица: $\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right]$ Переход от одной расширенной

матрице к другой будем обозначать знаком \sim или \Leftrightarrow .

Например, запись $2C_2 + C_1 \Leftrightarrow \dots$ означает: строку №2 умножаем на 2 и складываем со строкой №1.

На деле приводим исходную матрицу к треугольному виду. Если при переходе матрицы А к треугольной в новой матрице не возникло ни одной нулевой строки (столбца), то исходная система имеет единственное решение.

Пример:

$$\begin{cases} 2x + 4y - z = 3 \\ -x + 3y + 2z = 7 \\ 3x + 2y - 2z = -3 \end{cases}$$

Составляем расширенную матрицу системы и преобразовываем:

$$\begin{aligned} \tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \end{array} \right] & 2C_2 + C_1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 10 & 3 & 17 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \end{array} \right] & 3C_1 - 2C_3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 10 & 3 & 17 \\ 0 & 8 & 1 & 15 \end{array} \right] & C_2 - C_3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 10 & 3 & 17 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right] & C_2 - 5C_3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 10 & 3 & 17 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Тогда:

$$-7z = 7, z = -1; \quad 10y + 3z = 17, 10y = 17 + 3, y = 2; \quad 2x + 4y - z = 3, 2x + 8 + 1 = 3, x = -3$$

Ответ: (-3; 2; -1)

Задания для выполнения практической работы:

Вариант №1

Задание №1.

Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера

$$\left. \begin{aligned} x - 2y - z &= 3 \\ 2x + 4y + 2z &= 5 \\ 3x + 6y + 3z &= 9 \end{aligned} \right\}$$

Задание №2.

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 &= 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= 12 \end{aligned} \right\}$$

Задание №3.

Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\left. \begin{aligned} -3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 17 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 8 \end{aligned} \right\}$$

Вариант №2

Задание №1.

Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера

$$\left. \begin{aligned} x - 4y + 3z &= 5 \\ -2x - 8y + 6z &= 11 \\ 3x - 10y + 9z &= 13 \end{aligned} \right\}$$

Задание №2.

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\left. \begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 &= 13 \\ 7x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 21 \end{aligned} \right\}$$

Задание №3.

Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -3 \\ -2x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= -11 \\ -4x_1 - 3x_2 + 8x_3 &= -2 \end{aligned} \right\}$$

Форма отчетности и контроля: задания с решением, оценка.

Практическая работа №3

Тема: Действия над комплексными числами. Переход от алгебраической к тригонометрической форме

Цель: отработка умений и навыков выполнения действий над комплексными числами.

Время на выполнение: 2 часа.

Основные теоретические сведения

Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где x, y – действительные числа, i – мнимая единица ($i = \sqrt{-1}, i^2 = -1$),

$x = \operatorname{Re} z$ – действительная часть комплексного числа,

$y = \operatorname{Im} z$ – мнимая часть комплексного числа.

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется чисто мнимым.

Определение: $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$

$z = x + iy$ – алгебраическая форма представления комплексного числа.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся только знаком мнимой части называются сопряженными.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x; y)$ плоскости Оху такой, что $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$ и наоборот.

Плоскость, на которой изображается комплексное число называется комплексной плоскостью (обозначается C). Ось абсцисс – действительная ось. Ось ординат – мнимая.

Комплексное число z можно изобразить и с помощью радиуса вектора $\vec{r} = \vec{OM}$,

Длина вектора \vec{r} , изображающего комплексное число, называется модулем этого числа (обозначается $|z|$ или r): $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором \vec{r} , изображающим комплексное число, называется аргументом этого числа (обозначается $\operatorname{Arg} z$).

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ величина многозначная: $\arg z = \arg z + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2$, где $\arg z$ – главное значение аргумента, заключенное в промежутке $[-\pi; \pi]$, то есть $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Аргумент комплексного числа $z = 0 = 0 + i0$ не определен.

Запись числа в виде $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ называется тригонометрической формой.

φ определяется из формул: $\cos \varphi = \frac{x}{r}, \sin \varphi = \frac{y}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Аргумент z можно найти, используя формулу $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$, так как $-\pi < \arg z \leq \pi$, то из

формулы $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ находим:

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \text{ при } x > 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi \text{ при } x < 0, y > 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi \text{ при } x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Показательная форма комплексного числа (или экспоненциальная):

$$z = re^{i\varphi} \text{ или } z = |z|e^{i \arg z}$$

$$z = x + iy = e^{a+i\varphi}$$

$$a = \ln r = \ln |z|$$

$$\varphi = \arg z$$

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi} - \text{формула Эйлера}$$

Действия над комплексными числами

I. В алгебраической форме: $z_1 = x_1 + i y_1, z_2 = x_2 + i y_2$.

1) Сумма: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

2) Разность $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

3) Произведение $z_1 * z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$

4) Частное: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$

Из разности $z_1 - z_2 \Rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

II. В тригонометрической форме:

1,2) Сумма(разность). При сложении(вычитании) комплексного числа их радиус векторы складываются (вычитаются) по правилу параллелограмма.

3) Произведение. $z_1 * z_2 = r_1 * r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

4) Деление $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

5) Возведение в степень (формула Муавра):

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

6) Извлечение корня:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2r\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2r\pi}{n} \right)$$

$$r = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

III. В показательной форме:

1) Для действительных чисел комплексная показательная функция совпадает с обычной.

2) Для функции $z = e^{a+i\varphi}$ сохраняются правила *, /, возводится в степень и извлечение корня обычной показательной функции

$$z_1 z_2 = \frac{e^{a_1+i\varphi_1}}{e^{a_2+i\varphi_2}} = e^{a_1-a_2+i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

$$z^n = (e^{a+i\varphi})^n = e^{na+in\varphi}$$

Задания для выполнения практической работы:

Вариант №1

Задание №1. Даны числа $z_1=2+3i$ и $z_2=3-5i$.

Вычислить:

1. z_1+z_2 .

2. z_1*z_2 .

3. $\frac{z_1}{z_2}$.

4. $\overline{z_1}$.

Изобразить:

1. z_1 .

2. z_2 .

3. z_1+z_2 .

4. $\frac{z_1}{z_2}$.

Задание №2. Следующие комплексные числа изобразить векторами и записать в тригонометрической форме: $z_1=5$ и $z_2 = -\sqrt{3} + i$.

Задание №3. Вычислить $z_1^3, \sqrt[3]{z_1}$ (z_1 из второго задания).

Задание №4. Вычислить $(1-2i)(-3i) + \frac{-1-i}{5i}$.

Вариант №2

Задание №1. Даны числа $z_1=1-2i$ и $z_2=5+4i$.

Вычислить:

1. z_1+z_2 .

2. z_1*z_2 .

3. $\frac{z_1}{z_2}$.

4. $\overline{z_1}$.

Изобразить:

1. z_1 .

2. z_2 .

3. z_1+z_2 .

4. $\frac{z_1}{z_2}$.

Задание №2. Следующие комплексные числа изобразить векторами и записать в тригонометрической форме: $z_1=i$ и $z_2 = 1 + i \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задание №3. Вычислить $z_1^3, \sqrt[3]{z_1}$ (z_1 из второго задания).

Задание №4. Вычислить $\frac{-1-i}{1+2i} + (1-2i)$.

Форма отчетности и контроля: задания с решением, оценка.

Практическая работа №4

Тема: Вычисление простых пределов

Цель: закрепить навыки вычисления пределов функции, применения теорем о пределах функции; раскрытия различных видов неопределенностей.

Время на выполнение: 2 часа.

Основные теоретические сведения

Вычисление пределов с помощью теорем

Конечное число A называется **пределом функции $f(x)$ в точке x_0** , если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех значений x , удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, соответствующие значения функции удовлетворяют неравенству $|f(x) - A| < \varepsilon$. Для обозначения такого предела используют символику:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

При решении задач полезно помнить следующие основные свойства пределов функций:

1. Если функция имеет конечный предел, то он единственный.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

4. Предел суммы (или разности) функций равен сумме (или разности) их пределов, если оба предела являются конечными

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

6. Предел произведения функций равен произведению их пределов, если оба предела являются конечными

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

8. Предел отношения функций равен отношению их пределов, если оба предела являются конечными и знаменатель не обращается в нуль

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ если } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

Пример: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2}{x^3 - 1} = \frac{2 \cdot 2^2}{2^3 - 1} = \frac{8}{7}$

Вычисление пределов, имеющих неопределенности

При вычислении предела элементарной функции $f(x)$ приходится сталкиваться с двумя существенно различными типами примеров.

Функция $f(x)$ определена в предельной точке $x = a$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Функция $f(x)$ в предельной точке $x = a$ не определена или же вычисляется предел функции при $x \rightarrow \infty$. Тогда вычисление предела требует в каждом случае индивидуального подхода.

Необходимо помнить, что

$$\frac{C}{\infty} = 0, \frac{\infty}{C} = \infty, \infty + C = \infty, \frac{0}{C} = 0, \frac{C}{0} = \infty, 0 + C = C.$$

Более сложными случаями нахождения предела являются такие, когда функция $f(x)$ в точке $x = a$ или при $x \rightarrow \infty$ представляет собой неопределенность (типа $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0).

При вычислении пределов при $x \rightarrow \infty$ основные теоремы о пределах сохраняют силу и, кроме того, используются правила:

- а) чтобы раскрыть неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$, необходимо числитель и знаменатель дроби разделить на наибольшую степень переменной;
- б) чтобы раскрыть неопределенность типа $\frac{0}{0}$, необходимо числитель и знаменатель дроби разделить на наименьшую степень переменной;
- в) чтобы раскрыть неопределенность типа $\frac{0}{0}$, иногда достаточно числитель и знаменатель дроби разложить на множители и затем сократить дробь на множитель, приводящий к неопределенности;
- г) чтобы раскрыть неопределенность типа $\frac{0}{0}$, зависящую от иррациональности, достаточно перевести иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и сократить на множитель, приводящий к неопределенности;
- д) чтобы раскрыть неопределенность типа $\infty - \infty$, необходимо числитель и знаменатель дроби одновременно умножить на сопряженное выражение и тем самым свести к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$.

Примеры вычисления пределов:

1. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 13x + 6}{3x^2 + 2x - 8}$

Решение:

Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$

Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель $x + 2$, который при $x \rightarrow -2$ не равен нулю. В результате неопределенность будет раскрыта.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 13x + 6}{3x^2 + 2x - 8} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(5x+3)}{(x+2)(3x-4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x+3}{3x-4} = \frac{7}{10} = 0,7$$

2. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{21+x} - 5}{x^3 - 64}$$

Решение:

Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$

Для ее раскрытия умножим числитель и знаменатель на выражение сопряженное числителю, разложим выражение, стоящее в знаменателе, на множители по формуле разности кубов и сократим числитель и знаменатель на общий множитель $x - 4$, который при $x \rightarrow 4$ не равен нулю. В результате неопределенность будет раскрыта.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{21+x}-5)(\sqrt{21+x}+5)}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{21+x-25}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(x^2+4x+16)(\sqrt{21+x}+5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x^2+4x+16)(\sqrt{21+x}+5)} = \frac{1}{480}. \end{aligned}$$

3. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 2x^3 + 5}{6x^4 + 3x^2 - 7x}$$

Решение:

Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$

Для ее раскрытия можно либо разделить числитель и знаменатель на наибольшую степень переменной x и учитывая, что величина обратная бесконечно большой величине есть бесконечно малая величина, раскроем исходную неопределенность, либо вынести переменную в наибольшей степени в числителе и знаменатели дроби и сократить на наибольшую степень.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 2x^3 + 5}{6x^4 + 3x^2 - 7x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 + 2/x + 5/x^4}{6 + 3/x^2 - 7/x^3} = \frac{7}{6}$$

Задания для выполнения практической работы:

Вариант №1

Задание №1. Вычислить пределы:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-4}{x-2}$;
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 4x - 1}{3x^2 + x + 2}$;
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - x}{3x + 5}$;
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2-x}}{x^2 + 5x - 6}$;
5. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x^4 + 2x^3 - 2x - 1}$.

Вариант №2

Задание №1. Вычислить пределы:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 5x + 1}{3 + 14x^2 + 2x}$;
2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$;
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5} + \sqrt[3]{8x^3 + 1}}{\sqrt[5]{x^5 + 3}}$;
4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{2+x}}{x^2 - 1}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x + 1}{x^2 + x + 2}$.

Форма отчетности и контроля: задания с решением, оценка.

Практическая работа №5

Тема: Вычисление пределов с помощью замечательных

Цель: закрепить навыки вычисления пределов функции, применения теорем о пределах функции; раскрытия различных видов неопределенностей.

Время на выполнение: 2 часа.

Основные теоретические сведения Замечательные пределы

Первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Следствия: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

Второй замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ или $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ или $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Примеры:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{10x} - 1}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x}{5x} = 2$, т.к. при $x \rightarrow 0$ $10x \sim 5x$ – эквивалентные б.м.ф.

Тогда: $e^{10x} - 1 \sim 10x$, $\operatorname{tg} 5x \sim 5x$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x \cdot \operatorname{tg} 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \sin 2x}{x \cdot 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \sin 2x}{2x \cdot 2x \cdot \frac{5}{4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$; ($\operatorname{tg} 5x \sim 5x$);

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{4x^2} = \frac{1}{2}$;

$\sin(x/2) \sim x/2$, $1 - \cos x = 1 - \cos 2 \cdot \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$; $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$;

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{2x+3}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{2x+3}{2}}\right)^{-\frac{2x+3}{2} \cdot \frac{2}{2x+3} \cdot 2x} = (e)^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x}{2x+3}} = e^{-\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{2x+3}} = e^{-2}$

Второй замечательный предел

В теории математического анализа доказано, что:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha = e$$

Данный факт носит название **второго замечательного предела**.

Справка: $e = 2,718281828\dots$ – это иррациональное число.

В качестве параметра α может выступать не только переменная x , но и сложная функция. **Важно лишь, чтобы она стремилась к бесконечности.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x}$$

Пример: Найти предел

Когда выражение под знаком предела находится в степени – это первый признак того, что нужно попытаться применить второй замечательный предел.

Нетрудно заметить, что при $x \rightarrow \infty$ основание степени $\left(1 + \frac{1}{3x}\right) \rightarrow 1$, а показатель – $4x \rightarrow \infty$, то есть имеется, неопределенность вида 1^∞ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^\infty$$

Данная неопределенность как раз и раскрывается с помощью второго замечательного предела. Но, как часто бывает, второй замечательный предел не лежит на блюдечке с голубой каемочкой, и его нужно искусственно организовать. Рассуждать можно следующим образом: в данном примере параметр $\alpha = 3x$, значит, в показателе нам тоже нужно организовать $3x$. Для этого возводим основание в степень $3x$, и, чтобы выражение не изменилось – возводим в степень $\frac{1}{3x}$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right)^{\frac{1}{3x} \cdot 4x}$$

Когда задание оформляется от руки, карандашом помечаем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right)^{\frac{1}{3x} \cdot 4x}$$

→ в (2-ой замечательный предел)

Практически всё готово, страшная степень превратилась в симпатичную букву e :
При этом сам значок предела перемещаем в показатель.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right)^{\frac{1}{3x} \cdot 4x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{3x}} = e^{\frac{4}{3}}$$

→ в (2-ой замечательный предел)

Далее, отметки карандашом я не делаю, принцип оформления, думаю, понятен.

Пример: Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}$

Внимание! Предел подобного типа встречается очень часто, пожалуйста, очень внимательно изучите данный пример.

Попробуем подставить бесконечно большое число в выражение, стоящее под знаком предела:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty$$

В результате получена неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty$. Но второй замечательный предел применим к неопределенности вида 1^∞ . Что делать? Нужно преобразовать основание степени. Рассуждаем так: в знаменателе у нас $x+1$, значит, в числителе тоже нужно организовать $x+1$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}$$

Теперь можно почленно разделить числитель на знаменатель:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}$$

Вроде бы основание стало напоминать $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$, но у нас знак «минус» да и тройка какая-то вместо единицы. Поможет следующее ухищрение, делаем дробь трехэтажной:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x+1}\right)^{2x+3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3} = 1^{\infty} \end{aligned}$$

Таким образом, основание приняло вид $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$, и, более того, появилась нужная нам неопределенность 1^{∞} . Организуем второй замечательный предел $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$.

Легко заметить, что в данном примере $\alpha = \frac{x+1}{-3}$. Снова исполняем наш искусственный прием: возводим основание степени в $\frac{x+1}{-3}$, и, чтобы выражение не изменилось –

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x+1}\right)^{2x+3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3} = 1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{\frac{x+1}{-3} \cdot \frac{-3}{x+1} \cdot (2x+3)} \end{aligned}$$

Наконец-то долгожданное $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$ устроено, с чистой совестью превращаем его в букву e :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x+1}\right)^{2x+3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3} = 1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{\frac{x+1}{-3} \cdot \frac{-3}{x+1} \cdot (2x+3)} = e^{-3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x+1}} = e^{-\frac{\infty}{\infty}} \end{aligned}$$

Но на этом мучения не закончены, в показателе у нас появилась неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, раскрывать такую неопределенность мы научились. Делим числитель и знаменатель на x :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2x+3} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right)^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1-3}{x+1} \right)^{2x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x+1} \right)^{2x+3} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+1}{-3}} \right)^{2x+3} = 1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+1}{-3}} \right)^{\frac{x+1}{-3} \cdot \frac{-3}{x+1} (2x+3)} = e^{-3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x+1}} = e^{-\frac{\infty}{\infty}} = \\
&= e^{-3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x+1}} = e^{-3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}} = e^{-3 \cdot 2} = e^{-6}
\end{aligned}$$

А сейчас мы рассмотрим модификацию второго замечательного предела. Напомним,

что второй замечательный предел выглядит следующим образом: $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)^{\alpha} = e$. Однако на практике время от времени можно встретить его «перевёртыш», который в общем виде записывается так:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(1 + \alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

Задания для выполнения практической работы:

Вариант №1

Задание: Вычислить пределы:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{2x}$;
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{5x^2}$;
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2x}{5} \right)^{\frac{1}{x}}$;
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{5x} \right)^{2x}$;
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2} \right)^{\frac{3}{x}}$;
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{3x}$;
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{4x}$;
8. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}}$;
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 10x}{25x^2}$;
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{4x^2}$.

Вариант №2

Задание: Вычислить пределы:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x} \right)^{3x}$;

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x+1} \right)^{3x};$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x};$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{3x^3};$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{2x} \right)^{\frac{3x}{4}};$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x};$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{4x};$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^{2x};$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x} \right)^{3x};$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+4x)^{\frac{5}{x}}.$$

Форма отчетности и контроля: задания с решением, оценка.

Практическая работа №6

Тема: Вычисление производной сложной функции

Цель: отработка умений и навыков дифференцирования простых и сложных функций.

Время на выполнение: 2 часа.

Основные теоретические сведения

Определение: Производной функции $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения ее приращения $\Delta f(x)$ к приращению Δx аргумента x , когда приращение аргумента стремится к нулю: $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

Если этот предел конечный, то функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой в точке x . Если же этот предел есть ∞ , то говорят, что функция $y=f(x)$ имеет в точке x бесконечную производную.

Механический смысл производной: скорость есть первая производная пути по времени, т.е. $v = S'(t)$.

Геометрический смысл производной: тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ равен первой производной этой функции, вычисленной в точке касания, т.е. $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 :

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 :

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Основные правила дифференцирования

Обозначим $f(x) = u$, $g(x) = v$ – функции, дифференцируемые в точке x .

- $(c)' = 0$
- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(cu)' = c \cdot u'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \quad (v \neq 0)$
- $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c}{v^2} \cdot v'; \quad (v \neq 0)$
- $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

Производные основных элементарных функций

- $C' = 0$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(x^m)' = mx^{m-1}$
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
- $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$$15. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$16. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Производная сложной функции

Теорема. Пусть $y = f(x)$; $u = g(x)$, причем область значений функции u входит в область определения функции f .

Тогда $y' = f'(u) \cdot u'$

Если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, т.е. $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция, то $y'_x = f'(u) \cdot u'$.

На основании определения производной и правил дифференцирования составлена таблица производных сложных функций.

$$1. (u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u' \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$2. (\operatorname{tgu})' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

$$3. (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$$

$$4. (\operatorname{ctgu})' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

$$5. (e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$6. (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$7. (\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$$

$$8. (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$9. (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$10. (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$11. (\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$12. (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$13. (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

Примеры дифференцирования функций

Пример 1. Найти производную функции:

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{6x^6} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{6}x^{-6} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = \left(x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{6}x^{-6} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}} \right)' + \frac{1}{6} \left(x^{-6} \right)' - \frac{1}{2} \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} + \frac{1}{6}(-6)x^{-7} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) x^{-\frac{3}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} - \frac{1}{x^7} + \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

Ответ: $y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} - \frac{1}{x^7} + \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$.

Пример 2. Найти производную функции $y = (x^3 - 3x^2 + 1)^3$.

Решение:

Используем формулу $(u(x)^n)' = n \times u(x)^{n-1} \times (u(x))'$

$$y' = 3(x^3 - 3x^2 + 1)^2 \times (x^3 - 3x^2 + 1)' = 3(x^3 - 3x^2 + 1)^2 \times (3x^2 - 6x)$$

Пример 3. Найти производную функции $y = \cos(4 - 2x)$.

Решение:

Используем формулу $(\cos(u(x)))' = -\sin(u(x)) \times (u(x))'$

$$y' = -\sin(4 - 2x) \times (4 - 2x)' = -\sin(4 - 2x) \times (0 - 2) = 2 \sin(4 - 2x)$$

Пример 4. Найти производную функции $y = \sqrt{2 - 3x^2}$.

Решение:

Используем формулу $(\sqrt{u(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times (u(x))'$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{2 - 3x^2}} \times (2 - 3x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{2 - 3x^2}} \times (0 - 6x) = \frac{-6x}{2\sqrt{2 - 3x^2}} = \frac{-3x}{\sqrt{2 - 3x^2}}$$

Задания для выполнения практической работы:

Вариант №1

Задание: Вычислить производные функций

1. $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x^3\sqrt{x} + \frac{1}{x^3}$

2. $y = (x^4 - x^2 + 1)^3$

3. $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x - 1}$

4. $y = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$

5. $y = \lg \frac{10 - x}{x + 2}$

6. $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} + 1}$

7. $y = \sin 4x \cos 4x$

8. $y = \sin x^2$

9. $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

10. $y = \sin^4 x - \cos^4 x$

Вариант №2

Задание: Вычислить производные функций

1. $y = \sqrt[3]{4x^3 - 7x^2 + 1}$

2. $y = (\sin^2 x + 1)e^x$

3. $y = \sqrt[3]{x^2 - 1} \cdot (x^4 - 1)$

4. $y = \ln \sqrt{x^2 - 1}$

5. $y = e^{x^3 - 5x^2}$

6. $y = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x-1}}$

7. $y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x}$

8. $y = 5(x+1)^2 \sqrt{x-1}$

9. $y = \frac{1}{2} \sin x \operatorname{tg} 2x$

10. $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$

Форма отчетности и контроля: задания с решением, оценка.

Практическая работа №7

Тема: Исследование функций с помощью производной

Цель: отработка умений и навыков исследования функций с использованием производной.

Время на выполнение: 2 часа.

Основные теоретические сведения

Схема исследования функции

Дана функция $y = f(x)$. Задача: построить график.

- 1) Найти область определения функции $D(y)$;
- 2) Исследовать функцию на четность;
- 3) Определить, является ли функция периодичной;
- 4) Исследовать функцию при помощи первой производной, т.е. найти:
 - Промежутки возрастания и убывания функции;
 - Точки экстремумов и экстремумы;
 - При необходимости – наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке;
- 5) Исследовать функцию при помощи второй производной, то есть найти:
 - Точки перегиба и значения функции в этих точках;
 - Определить вид выпуклости графика;
- 6) Найти точки пересечения графика с осями координат:
 - С осью Ox – **нули функции**;
 - С осью Oy , $y(0)$;
- 7) Сосчитать дополнительные точки (в том случае, если невозможно найти нули функции);
- 8) Найти асимптоты графика;

Если функция достаточно сложная, рекомендуется составить сводную таблицу.

Задание. $y = \frac{x^3 - 4x}{3x^2 - 4}$.

Дополнительно: к графику функции построить касательную в точке $x = -1$.

1) $D(y): 3x^2 - 4 \neq 0, x \neq \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ – здесь: *функция непрерывна на области определения, а в точках $x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ не существует; область определения симметрична, поэтому пункт 2;*

2) $y(-x) = \frac{(-x)^3 - 4 \cdot (-x)}{3 \cdot (-x)^2 - 4} = \frac{-x^3 + 4x}{3x^2 - 4} = -\frac{x^3 - 4x}{3x^2 - 4} = -y(x)$ – функция нечетная;

3) Непериодична;

4) $y' = \frac{(x^3 - 4x)'(3x^2 - 4) - (x^3 - 4x)(3x^2 - 4)'}{(3x^2 - 4)^2} = \dots = \frac{3x^4 + 16}{(3x^2 - 4)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^4 + 16 = 0 \\ 3x^2 - 4 \neq 0 \end{cases}$

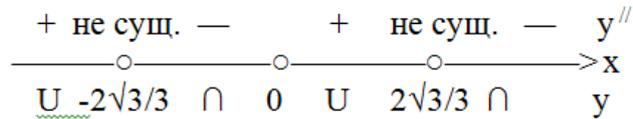
решений нет, значит, функция ведет себя монотонно на каждом промежутке

существования: $y' > 0 \Rightarrow y \uparrow$ на $\left(-\infty; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$

5) $y'' = \frac{\left(\frac{3x^4 + 16}{(3x^2 - 4)^2}\right)'}{(3x^2 - 4)^2} = \frac{(3x^4 + 16)'(3x^2 - 4)^2 - (3x^4 + 16)((3x^2 - 4)')^2}{(3x^2 - 4)^4} = \dots = \frac{-48x(3x^4 + 8x^2 - 16)}{(3x^2 - 4)^4}$

Ищем критические точки 2 рода:

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -48x(3x^4 + 8x^2 - 16) = 0 \\ 3x^2 - 4 \neq 0 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_{2,3} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad x = 0 \\ x \neq \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$



$x=0$ точка перегиба $y(0)=0$;

б) а) Нули функции: $y=0 \Rightarrow x^3 - 4x = 0, \quad x(x^2 - 4) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_{2,3} = \pm 2 \end{cases}$;

б) Точка пересечения графика с Oy : $x=0, y(0)=0$

7) Дополнительные точки – не нужны;

8) Асимптоты:

- $x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ - вертикальные асимптоты;

- Наклонная асимптота: $y = \frac{1}{3}x$. Чтобы найти наклонную асимптоту, нужно

вычислить коэффициенты k и b линейной функции

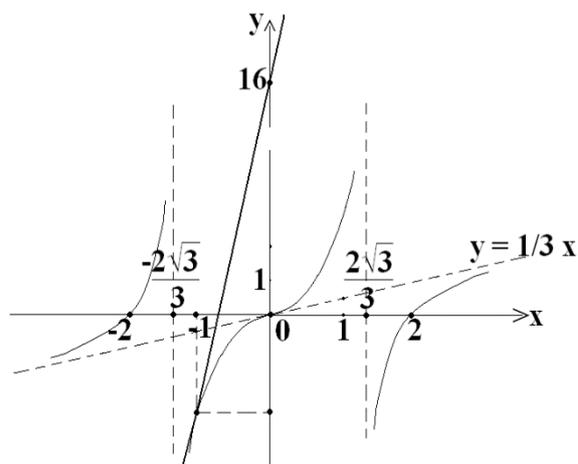
$$y = kx + b: \quad k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 4x}{x(3x^2 - 4)} = \frac{1}{3}; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 - 4x}{3x^2 - 4} - \frac{1}{3}x \right) = \dots = 0$$

Касательная:

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0); \quad x = -1, y'(-1) = 19, y(-1) = -3 \Rightarrow y = 19(x + 1) - 3 = 19x + 16$$

Составим сводную таблицу:

x	$(-\infty, -2\sqrt{3}/3)$	$-2\sqrt{3}/3$	$(-2\sqrt{3}/3, 0)$	0	$(0, 2\sqrt{3}/3)$	$2\sqrt{3}/3$	$(2\sqrt{3}/3, \infty)$
y	\uparrow	$\rightarrow \pm\infty$	\uparrow	0	\uparrow	$\rightarrow \pm\infty$	\uparrow
y'	$+$	Нет	$+$	1	$+$	Нет	$+$
y''	$+$	Нет	$-$	0	$+$	Нет	$-$
выпуклость	U	Вертик. асимптота	\cap	Точка перегиба	U	Вертик. асимптота	\cap



Задания для выполнения практической работы:

Вариант №1

Задание: Провести полное исследование функции $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ и построить её график.

Вариант №2

Задание: Провести полное исследование функции $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ и построить её график.

Форма отчетности и контроля: задания с решением, оценка.

Практическая работа №8

Тема: Нахождение неопределенных интегралов табличным методом и методом подстановки

Цель: отработка умений и навыков вычисления неопределенных интегралов различными методами.

Время на выполнение: 2 часа.

Основные теоретические сведения

Функция $F(x)$ называется *первообразной функции* $f(x)$, если они обе существуют на одном и том же множестве, и производная функции $F(x)$ равна функции $f(x)$.

$$F'(x) = f(x)$$

Операция нахождения первообразной называется *интегрирование*. Это операция, обратная дифференцированию.

Неопределенный интеграл

Для любой функции существует бесконечно много первообразных, которые имеют общую часть, а различаются лишь постоянными (числами).

Например, для функции $f(x) = 3x^2 + 4x - 5 \cos x$

$$F_1(x) = x^3 + 2x^2 - 5 \sin x, \quad F_2(x) = x^3 + 2x^2 - 5 \sin x + 1, \quad F_3(x) = x^3 + 2x^2 - 5 \sin x - \sqrt{3}$$

являются первообразными, так как $F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x) = f(x)$. И подобных первообразных можно составить сколько угодно.

Совокупность всех первообразных для данной функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается $\int f(x)dx$.

Здесь:

$f(x)$ – подынтегральная функция,

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение,

dx – дифференциал аргумента.

Тогда, общая формула: $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Таким образом, для вычисления неопределенного интеграла, нужно найти все первообразные заданной функции.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d \int f(x)dx = \left(\int f(x)dx \right)' dx = f(x)dx$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx, \quad a \neq 0$$

5. Неопределенный интеграл от суммы двух функций равен сумме их интегралов:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Таблица основных интегралов

1. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C (p \neq -1), \int dx = \int x^0 dx = x + C$	13. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C, (x^p, p = -1)$	14. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$
3. $\int e^x dx = e^x + C$	15. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	16. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$	17. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	18. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	20. $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left x + \sqrt{x^2 + a^2} \right + C$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	21. $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left x + \sqrt{x^2 - a^2} \right + C$
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$	
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	22. Для сложной функции: $\int f(\alpha x + b) dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + b) + C$
12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	

Методы интегрирования

Метод непосредственного интегрирования

Существует несколько стандартных методов вычисления интегралов. Непосредственное интегрирование подразумевает вычисление неопределенного интеграла только при помощи свойств интеграла и таблицы основных интегралов.

Примеры: Вычислить интегралы:

$$1) \int (7x^6 + 5x^4 - 3) dx = 7 \frac{x^7}{7} + 5 \frac{x^5}{5} - 3x + C = x^7 + x^5 - 3x + C$$

$$2) \int \left(\sqrt[5]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right) dx = \int \left(x^{\frac{2}{5}} + x^{-\frac{1}{4}} \right) dx = \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C = \frac{5}{7} x^{\frac{7}{5}} \sqrt{x^2} + \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C$$

$$3) \int \frac{1-6x+4x^2}{x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x} + 4 \right) dx = -\frac{1}{x} - 6 \ln |x| + 4x + C$$

$$4) \int 2 \cos 2x dx = 2 \frac{\sin 2x}{2} + C = \sin 2x + C$$

$$5) \int \frac{\sin 3x}{2} dx = \frac{1}{2} \frac{(-\cos 3x)}{3} + C = -\frac{\cos 3x}{6} + C$$

Интегрирование методом замены переменной (метод подстановки)

Если не удастся найти интеграл непосредственно, то интегрируем методом подстановки.

Сущность метода: введением новой переменной интегрирования свести заданный интеграл к новому, который вычисляется непосредственно.

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt, \quad \text{где} \quad x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt$$

При этом должен остаться интеграл, в котором будет только одна переменная. Для этого обозначаем вводимую переменную $t = g(x)$ и считаем $dt = g'(x)dx$. После интегрирования необходимо вернуться к исходной переменной.

Пример оформления:

$$\int (3x - 5)^7 dx = \left[\begin{array}{l} 3x - 5 = t \\ 3dx = dt, dx = dt/3 \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int t^7 dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^8}{8} + C = \frac{1}{24} (3x - 5)^8 + C$$

Примеры:

$$1) \int x^2 (3 + 2x^3)^4 dx = \left[\begin{array}{l} 3 + 2x^3 = t \\ 6x^2 dx = dt \\ x^2 dx = \frac{1}{6} dt \end{array} \right] = \frac{1}{6} \int t^4 dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{t^5}{5} + C = \frac{(3 + 2x^3)^5}{30} + C$$

$$2) \int \frac{3xdx}{\sqrt[3]{(x^2 - 3)^2}} = \left[\begin{array}{l} x^2 - 3 = t \\ 2xdx = dt \\ xdx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right] = \frac{3}{2} \int t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = \frac{9}{2} \sqrt[3]{t} + C = \frac{9}{2} \sqrt[3]{x^2 - 3} + C$$

Задания для выполнения практической работы:

Вариант №1

Задание №1: Найти интегралы, используя таблицу и основные свойства.

$$1. \int \left(4\sqrt{x} + \cos x - \frac{5}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$$

$$2. \int \left(\sin x - \frac{4}{x^2 - 9} \right) dx$$

$$3. \int \frac{5x}{x^2} dx$$

$$4. \int (5x + 3) dx$$

$$5. \int \frac{7dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

Задание №2: Найти интегралы, используя метод замены переменной.

$$1. \int (4x^2 + 5) x dx$$

$$2. \int (\sin^2 x) \cos x dx$$

$$3. \int e^{x^2 - 5} x dx$$

$$4. \int 2x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$$

$$5. \int \frac{x dx}{2x^2 + 1}$$

Вариант №2

Задание №1: Найти интегралы, используя таблицу и основные свойства.

$$1. \int (\sin x - 5x + \sqrt{x}) dx$$

$$2. \int \left(e^x + \frac{3}{x^2 - 5} \right) dx$$

$$3. \int \frac{x^3 + 3x + 1}{x} dx$$

$$4. \int \frac{dx}{\sqrt{4 - 3x^2}}$$

$$5. \int x^4(x - 1) dx$$

Задание №2: Найти интегралы, используя метод замены переменной.

$$1. \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 9}$$

$$2. \int \sqrt{4x^3 + 1} x^2 dx$$

$$3. \int e^{-x^3 + 2} x^2 dx$$

$$4. \int \frac{4x dx}{\sqrt{4 + 3x^2}}$$

$$5. \int x^4(x^5 - 1)^2 dx$$

Форма отчетности и контроля: задания с решением, оценка.

Практическая работа №9

Тема: Вычисление определенного интеграла

Цель: закрепить умения вычислять определенный интеграл, применять определенный интеграл для вычисления площадей плоских фигур.

Время на выполнение: 2 часа.

Основные теоретические сведения

Определенный интеграл и его свойства

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок на n частей точками $a < x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, выберем на каждом элементарном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ произвольную точку ξ_k и обозначим через Δx_k длину каждого такого отрезка.

Интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется сумма вида

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n$$

Определение: Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

Для любой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, всегда существует

определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$

Простейшие свойства определенного интеграла

- 1) Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

- 2) Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла

$$\int_a^b Af(x) dx = A \int_a^b f(x) dx$$

- 3) При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

- 4) Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен нулю: $\int_a^a f(x) dx = 0$

- 5) Отрезок интегрирования можно разделить на части:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

c -точка, лежащая между a и b .

- 6) Если $f(x) \leq g(x)$ на отрезке $[a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$, в том случае, когда можно найти соответствующую первообразную $F(x)$, служит формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Рассмотрим нахождение простейших определенных интегралов.

Пример 1: Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$.

Решение: $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2$

Пример 2: Вычислить определенный интеграл: $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$.

Решение: $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^9 \left(\frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int_1^9 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \right) dx =$
 $= \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_1^9 = \left(\frac{2}{3} x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} \right) \Big|_1^9 = \left(\frac{2}{3} 9\sqrt{9} - 2\sqrt{9} \right) - \left(\frac{2}{3} 1\sqrt{1} - 2\sqrt{1} \right) =$
 $= 12 + \frac{4}{3} = 13\frac{1}{3}.$

Вариант №1

Задание №1. Вычислить интегралы табличным методом.

1) $\int_{-2}^1 (x^2 + 7) dx$

2) $\int_{-1}^3 (1 - 2x + 3x^2) dx$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3dx}{\cos^2 x}$

4) $\int_0^{\ln 3} e^x dx$

Задание №2. Вычислить интегралы методом подстановки.

1) $\int_{-1}^2 (x^2 - 1)^3 x dx$

2) $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}$

Задание №3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

1) $y = 3x - 1, y = 0, x = 2, x = 4$

2) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 3, y = 0, x = 0, x = 3$

Вариант №2

Задание №1. Вычислить интегралы табличным методом.

$$1) \int_1^4 \left(2x^2 - 3x - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$$

$$2) \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$3) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}$$

$$4) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$$

Задание №2. Вычислить интегралы методом подстановки.

$$1) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^3 + 5}$$

$$2) \int_0^3 e^{x^2+4} x dx$$

Задание №3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) y = 0, x + 4 - 2y = 0, x + y - 5 = 0$$

$$2) y = 9 - x^2, y = 0$$

Форма отчетности и контроля: задания с решением, оценка.

Практическая работа №10

Тема: Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

Цель: закрепить умения и навыки решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Время на выполнение: 2 часа.

Основные теоретические сведения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x , искомую функцию y и её производные или дифференциалы.

Символически дифференциальное уравнение записывается так:

$$\begin{aligned} F(x, y, y') &= 0, \\ F(x, y, y'') &= 0, \\ F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) &= 0. \end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок высшей производной (или дифференциала) входящих в данное уравнение.

Степенью дифференциального уравнения называется степень высшей в нём производной.

Решением или интегралом дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

Общим решением или интегралом дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения.

Дифференциальное уравнение первого порядка содержит одно произвольное постоянное.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных.

Значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргументы и функции.

График частного решения дифференциального уравнения называется **интегральной кривой**.

Общему решению дифференциального уравнения соответствует совокупность (семейство) всех интегральных кривых.

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое входят производные не выше первого порядка.

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнения вида:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y).$$

Решение уравнение с разделяющимися переменными выполняется в следующем порядке:

1. Выполнять разделение переменных:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx.$$

2. Проинтегрировать обе части уравнения:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx.$$

3. Найти частные решения уравнений и проверить их решения.

Практические упражнения

1) $ds = dt$, если $S=5$ при $t = 1$;

2) $ds=(3t^2-2t) dt$, если $s=4$ при $t=2$

Пример: найти частные решения уравнений и проверить их решения $3y^2 dy = x^2 dx$, если $y = 1$ при $x = 3$.

Решение:

1. Интегрируем обе части уравнения:

$$3 \int y^2 dy = \int x^2 dx;$$

$$y^3 = \frac{x^3}{3} + C.$$

2. Проверка общего решения. Взяв дифференциалы от обеих частей последнего уравнения, получим уравнение: $3y^2 dy = x^2 dx$.

3. Найдем частное решение. Подставим в найденное уравнение значения $x = 3$ и $y = 1$:

$$1^3 = \frac{3^3}{3} + C, \text{ откуда } C = -8.$$

Подставим значение $C = -8$ в уравнение (2), получим:

$$y^3 = \frac{x^3}{3} - 8.$$

4. Проверка частного решения производится так же, как и проверка общего решения.

Вариант №1

Задание №1: Найти общее и частное решения следующих дифференциальных уравнений.

1. $x^2 y dx + y^3 x dy = 0$, если $y = 1$ при $x = 1$.
2. $(x - 5)y dy - (y - 3)x dx = 0$, если $y = 2$ при $x = 1$.
3. $y dx + x dy = 0$, если $y = 1$ при $x = 2$.
4. $(x^2 - 1)y dy + (y^2 - 1)x dx = 0$, если $y = 2$ при $x = 3$.
5. $\frac{y dx}{\sqrt{x}} - \frac{x dy}{\sqrt[3]{y}} = 0$, если $y = 1$ при $x = 1$.

Вариант №2

Задание №1: Найти общее и частное решения следующих дифференциальных уравнений.

1. $x^3 y^2 dx + y^2 x dy = 0$, если $y = 1$ при $x = 1$.
2. $(x - 4)y dy + (y - 2)x dx = 0$, если $y = 2$ при $x = 1$.
3. $y^2 dx + x^2 dy = 0$, если $y = 1$ при $x = 2$.
4. $(x^2 + 1)y dy - (y^2 + 1)x dx = 0$, если $y = 2$ при $x = 2$.
5. $\frac{x dx}{\sqrt{y}} - \frac{y dy}{\sqrt[3]{x}} = 0$, если $y = 1$ при $x = 1$.

Форма отчетности и контроля: задания с решением, оценка.

Практическое занятие №11

Решение дифференциальных уравнений первого порядка»

Цель: Освоить решение однородных дифференциальных уравнений первого порядка

Вариант №1

Задание №1 Найдите общее и частное решение дифференциального уравнения

1. $x^3 y dx = y^2 x dy$, при $y=2, x=3$
2. $(x+3)y dy - 3(y-3)x dx = 0$, при $y=1, x=1$
3. $(y-1)dx - (x-1)dy = 0$ при $y=1, x=1$
4. $2(x^2 - 4)y dy + (y^2 - 4)x dx = 0$ при $y=1, x=1$
5. $\frac{dx}{\sqrt{x}} - \frac{x dy}{\sqrt[3]{y}} = 0$ при $y=1, x=1$

Вариант №2

Задание №1 Найдите общее и частное решение дифференциального уравнения

1. $x^2 y dx = y^3 x dy$, при $y=2, x=2$
2. $(x+1)y dy + 3(y-3)x dx = 0$, при $y=1, x=1$
3. $y dx - x y^2 dy = 0$ при $y=1, x=2$
4. $(x^2 - 1)y dy + (y^2 + 1)x dx = 0$ при $y=2, x=2$
5. $\frac{y^3 dx}{\sqrt{x}} + \frac{x^2 dy}{\sqrt[3]{y}} = 0$ при $y=1, x=1$

Задание №2 Ответить на контрольные вопросы

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Какое решение дифф. уравнения называется частным, какое общим?
3. В чём состоит суть метода разделяющихся переменных?
4. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением первого порядка?
Приведите пример
5. Какое дифференциальное уравнение называется однородным дифференциальным?
Приведите пример
6. Запишите чему равно частное решение в первых 3 примерах.

Литература: Баврин И.И. «Высшая математика» ГЛ 8 §8.1 Упр. №№6-12 стр. 428

ГЛ 9 §9.1 с 431 Упр. №36-42 №1-8

Подольский В.А., Суходольский А.М. Сборник задач по высшей математике с.196

№№11.26-11.31

Практическое занятие №12

«Применение основных теорем при решении задач»

При решении ряда теоритических и практических задач требуется из конечного множества элементов по заданным правилам составлять различные комбинации и производить подсчет числа всех возможных таких комбинаций. Такие задачи принято называть *комбинаторными*, а раздел математики, занимающийся их решением, называется *комбинаторикой*. Комбинаторика широко применяется в теории вероятностей, теории массового обслуживания, теории управляющих систем и вычислительных машин и других разделах науки и техники.

1. Размещения.

Определение 1. Пусть дано множество, состоящее из n элементов. *Размещением* из n элементов по m ($0 \leq m \leq n$) элементов называется упорядоченное подмножество, содержащее m различных элементов данного множества.

Из определения вытекает, что размещения из n элементов по m – это все m -элементные подмножества, отличающиеся составом элементов или порядком их следования.

Число всех возможных размещений из n элементов по m элементов обозначают A_n^m и вычисляют по формуле

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1). \quad (1)$$

Докажем формулу (1).

□ Так как в качестве первого элемента может быть выбран любой из данных n элементов, то первый элемент можно выбрать n различными способами. Очевидно, что в качестве второго элемента можно выбрать любой из оставшихся $n-1$ элементов, поэтому можно выбрать $n-1$ различными способами. Так как каждый из способов выбора первого элемента можно объединить с каждым из способов выбора второго элемента, то существуют $n(n-1)$ различных способов выбора первых двух элементов. Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что существуют $n(n-1)(n-2)$ различных способов выбора первых трех элементов и т. д. Наконец, существует

$$n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)$$

способов выбора m различных элементов, т.е. имеет место равенство (1).

Умножив и разделив часть равенства (1) на произведение $1*2*3 \dots (n-m)$, получим

$$A_n^m = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)(n-m) \dots 3*2*1}{1*2*3 \dots (n-m)},$$
$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (2)$$

Здесь $n! = 1 * 2 * 3 \dots (n-1) * n$ (читается «эн факториал») и $(n-m) = 1 * 2 * 3 \dots (n-m-1)(n-m)$ (читается «эн минус эм факториал»). Условимся считать $0! = 1$, поэтому $A_0^0 = \frac{0!}{0!} = 1$.

Пример 1. В группе из 30 учащихся нужно выбрать комсорга, профорга и физорга. Сколькими способами это можно сделать, если каждый из 30 учащихся комсомолец, член профсоюза и спортсмен?

△ Искомое число способов равно числу размещений из 30 элементов по 3 элемента, т.е. A_{30}^3 . Положив в формуле (1) $n = 30, m = 3$, получаем $A_{30}^3 = 30 * 29 * 28 = 24360$.

2. Перестановки.

Определение 2. *Перестановкой* из n элементов называется размещение из n элементов по n элементов.

Так как каждая перестановка содержит все n элементов множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов.

Число всех возможных перестановок из n элементов обозначают P_n . Из определения перестановок следует

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!,$$

$$P_n = n! \quad (3)$$

Пример 2. Сколькими способами можно расставлять на одной полке шесть различных книг? Искомое число способов равно числу перестановок из 6 элементов, т.е.

$$P_6 = 6! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720$$

3. Сочетания.

Определение 3. Пусть дано множество, состоящее из n элементов. Сочетанием из n элементов по m ($0 \leq m \leq n$) элементов называется любое подмножество, которое содержит m различных элементов данного множества.

Следовательно, сочетания из n элементов по m – это все m -элементные подмножества n -элементарного множества, причем различными подмножества считаются только те, которые имеют неодинаковый состав элементов. Подмножества, отличающиеся друг от друга лишь порядком следования элементов, не считаются различными.

Число всех возможных сочетаний из n элементов по m элементов обозначают C_n^m и вычисляют по формуле

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n*(n-1)*(n-2)*...*(n-m+1)}{m!}, \quad (4)$$

Докажем формулу (4).

Число A_n^m размещений из n элементов по m найдем следующим образом. Сначала составим все возможные подмножества, содержащие по m различных элементов. Их число равно C_n^m . Затем в каждом из полученных таким образом подмножеств (сочетаний) сделаем все перестановки, в результате получим все размещения из n элементов по m . Так как число перестановок из m элементов равно $m!$, то число A_n^m размещений из n элементов по m элементов равно $m!$ раз больше, чем число C_n^m сочетаний из n элементов по m , т.е.

$$A_n^m = m! C_n^m = P_m C_n^m$$

Отсюда

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)}{m!}$$

Так как $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$, то

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (5)$$

Число C_n^m сочетаний из n элементов по m определяют по одной из формул (4) или (5).

Пример 3. В бригаде из 25 человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

Так как порядок выбранных четырех человек не имеет значения, то это можно сделать C_{25}^4 способами. По формуле (4) находим

$$C_{25}^4 = \frac{25 * 24 * 23 * 22}{1 * 2 * 3 * 4} = 12650$$

Докажем, что $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Заменив в равенстве (5) m на $n - m$, получим $C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = C_n^m$. (6)

Формула (6) заметно упрощает вычисление числа C_n^m в тех случаях, когда $m > n/2$; например,

$$C_{20}^{18} = C_{20}^2 = \frac{20*19}{1*2} = 190.$$

Вариант 1

1. Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов - первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора Иванова окажется запланированным на последний день конференции?
2. В случайном эксперименте бросают 2 игральные кости. Найти вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Ответ округлите до сотых.
3. В кармане у Андрея было 4 монеты по 2 рубля и 2 монеты по 5 рублей. Он, не глядя, переложил 3 монеты в другой карман. Найти вероятность того, что обе монеты по 5 рублей лежат в одном кармане.

Вариант 2

1. В соревнованиях по плаванию участвуют 4 спортсмена из России, 7 спортсменов из Италии, 9 спортсменов из Финляндии и 5 - из Швейцарии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий последним, окажется из Швейцарии.
2. В случайном эксперименте бросают 2 игральные кости. Найти вероятность того, что в сумме выпадет 6 очков. Ответ округлите до сотых.
3. В кармане у Марины было 6 монет по 1 рублю и 2 монеты по 5 рублей. Она, не глядя, переложила 4 монеты в другой карман. Найти вероятность того, что обе монеты по 5 рублей лежат в одном кармане. Ответ округлите до сотых.

Вариант 3

1. Конкурс исполнителей проводится 3 дня. Всего заявлено 80 выступлений – по одному от каждой страны. В первый день пройдёт 20 выступлений. А остальные распределены поровну между оставшимися днями. Какова вероятность того, что выступление представителя России состоится в третий день?
2. Игральный кубик бросили один раз. Какова вероятность того, что выпадет не менее 4 очков?
3. В кармане у Юлии было 4 монеты по 1 рублю и 2 монеты по 2 рубля. Она, не глядя, переложила 3 монеты в другой карман. Найти вероятность того, что обе монеты по 2 рубля лежат в одном кармане.

Вариант 4

1. Конкурс исполнителей проводится 3 дня. Всего заявлено 60 выступлений – по одному от каждой страны. В первый день пройдёт 30 выступлений. А остальные распределены поровну между оставшимися днями. Какова вероятность того, что выступление представителя Франции состоится в третий день?
2. Игральный кубик бросили один раз. Какова вероятность того, что выпадет более 3 очков?
3. В кармане у Ивана было 6 монет по 2 рубля и 2 монеты по 5 рублей. Он, не глядя, переложил 4 монеты в другой карман. Найти вероятность того, что обе монеты по 5 рублей лежат в одном кармане. Ответ округлите до сотых.

4. Информационное обеспечение обучения

Основные источники:

1. Математика. Учебник для учреждений нач. и средн. проф. образования, М.И. Башмаков Москва. Издательский центр "Академия", 8-е изд., 2017г.
2. Высшая математика: учебник и практикум, В.С. Шипачев, 8-е изд., пер. и доп.- М.: Издательство Юрайт, 2017г.
3. Практические занятия по математике. Н.В. Богомоллов М11-е изд., пер. и доп.- М.: Издательство Юрайт, 2016г.

Дополнительные источники:

1. И.И. Валуцэ Математика для техникумов. - М.: Наука, 2012
2. В.С. Шипачев Основы высшей математики. - М.: Высшая школа, 2011
3. Н.В. Богомоллов Практические занятия по математике. - М: Высшая школа, 2012
4. В.А. Подольский и др. Сборник задач по математике: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - М.: Высшая школа, 2010
5. В.Н. Калинина, В.Ф. Панкин Математическая статистика. - М.: Высшая школа, 2001
6. В.С. Шипачев Задачи по высшей математике. - М.: высшая школа, 2010
7. В.Ф. Бутузов, Н.И. Крутицкая Математический анализ в вопросах и задачах. - М.: Физматлит, 2000
8. И.Д. Пехлецкий Математика. - М.: Мастерство, 2011
9. И.П. Натансон Краткий курс высшей математики. - С-Пб.. Лань, 2011
10. М.Я. Выгодский Справочник по высшей математике. - М.: Росткнига, 2011

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.infanata.com> > [science...matematika...texnikumov...i...](#)
2. <http://www.mozg.by> > [mathtests](#)
3. <http://www.testmath.ru>