Департамент внутренней и кадровой политики Белгородской области
Областное государственное автономное
профессиональное образовательное учреждение
**«Белгородский индустриальный колледж»**

Рассмотрено
цикловой комиссией
Протокол заседания № 1
от «31» августа 2020 г.
Председатель цикловой комиссии
____________________ Горлова Е.В.

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических работ
по дисциплине
## ОУД.09 МАТЕМАТИКА

по специальности
13.02.02 Теплоснабжение и теплотехническое оборудование

Квалификация – техник-теплотехник

Разработчик:
Преподаватель
Белгородский индустриальный колледж
Сапожникова Г.В.

Белгород 2020 г.

## Содержание

## 1. Пояснительная записка

### 1.1. Краткая характеристика дисциплины, ее цели и задачи. Место практических работ в курсе дисциплины

Дисциплина ОУД.09 Математика является частью общеобразовательного учебного цикла ППССЗ базовой подготовки и предназначена для обучающихся по специальностям технического профиля. Дисциплина изучается во II, III и IV семестрах. В целом, рабочей программой предусмотрено 30 часов на выполнение практических работ, что составляет не менее 13 % от обязательной аудиторной нагрузки, которая составляет 234 часа, при этом максимальная нагрузка составляет 351 час.

Цель настоящих методических указаний: оказание помощи обучающимся в выполнении практических работ по дисциплине ОУД.09 Математика, качественное выполнение которых поможет студентам освоить обязательный минимум содержания дисциплины и подготовиться к промежуточной аттестации в форме экзамена.

### 1.2. Организация и порядок проведения практических работ

Практические работы проводятся после изучения теоретического материала. Введение практических работ в учебный процесс служит связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, а также для получения практических навыков и умений. При проведении практических работ задания, выполняются студентом самостоятельно, с применением знаний и умений, усвоенных на предыдущих занятиях, а также с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя. Обучающиеся должны иметь методические рекомендации по выполнению практических работ, конспекты лекций, измерительные и чертежные инструменты, средство для вычислений.

### 1.3. Общие указания по выполнению практических работ

Курс практических работ по дисциплине ОУД.09 Математика предусматривает проведение 27 работ (30 часов), посвященных изучению:

- действиям над комплексными числами;
- решению систем линейных уравнений различными методами;
- решению квадратных уравнений и неравенств, методу интервалов;
- решению рациональных и иррациональных уравнений и неравенств;
- действиям со степенями;
- решению показательных уравнений и неравенств;
- вычислению логарифмов с использованием свойств;
- решению логарифмических уравнений и неравенств;
- решению задач на применение основных тригонометрических тождеств;
- применению тригонометрических формул для решения задач;
- решению тригонометрических уравнений и неравенств;
- функциям и их свойствам;
- решению практических задач, используя свойства функций и их графики;
- производной, ее физическому и геометрическому смыслу;
- правилам дифференцирования, дифференцированию основных элементарных функций;
- применению производной для исследования функции на монотонность и экстремумы;
- исследованию функции, с помощью производной, построению эскиза графика функции;
- вычислению неопределённых интегралов с использованием таблицы и основных свойств;
- решению комбинаторных задач;
- вероятности события, решению статистических задач;
- построению точек, отрезков в пространстве, вычислению расстояния между точками в пространстве;
- действиям над векторами;

• взаимному расположению прямых и плоскостей в пространстве;
• перпендикуляру и наклонной, теореме о трёх перпендикулярах;
• вычислению площадей многогранников;
• вычислению объёмов многогранников и круглых тел;
• вычислению площадей круглых тел.

При подготовке к проведению практической работы необходимо:
• ознакомиться с целями проведения практической работы;
• ознакомиться с порядком выполнения работы.

После выполнения практической работы обучающийся к следующему занятию оформляет отчет, который должен содержать:
• название практической работы, ее цель;
• краткие, теоретические сведения об изучаемой теме;
• все необходимые, предусмотренные практической работой, расчеты;
• выводы по итогам работы;
• ответы на контрольные вопросы.

**1.4. Критерии оценки результатов выполнения практических работ**

Критериями оценки результатов работы обучающихся являются:
– уровень усвоения обучающимся учебного материала;
– умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач;
– сформированность следующих результатов:

Личностных:

ЛР 1. Сформированность представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, идеях и методах математики;

ЛР 2. Понимание значимости математики для научно-технического прогресса, сформированность отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей;

ЛР 3. Развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования;

ЛР 4. Овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для освоения смежных естественно-научных дисциплин и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;

ЛР 5. Готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;

ЛР 6. Готовность и способность к самостоятельной творческой и ответственной деятельности;

ЛР 7. Готовность к коллективной работе, сотрудничеству со сверстниками в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности;

ЛР 8. Отношение к профессиональной деятельности как возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем;

Метапредметных:

МР 1. Умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность;

использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях;

МР 2. Умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты;

МР 3. Владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

МР 4. Готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников;

МР 5. Владение языковыми средствами: умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства;

МР 6. Владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств для их достижения;

МР 7. Целеустремленность в поисках и принятии решений, сообразительность и интуиция, развитость пространственных представлений; способность воспринимать красоту и гармонию мира;

Предметных:

ПР 1. Сформированность представлений о математике как части мировой культуры и месте математики в современной цивилизации, способах описания явлений реального мира на математическом языке;

ПР 2. Сформированность представлений о математических понятиях как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;

ПР 3. Владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

ПР 4. Владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;

ПР 5. Сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей;

ПР 6. Владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать геометрические фигуры на чертежах, моделях и в реальном мире; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;

ПР 7. Сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, статистических закономерностях в реальном мире, основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;

ПР 8. Владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач.

- обоснованность и четкость изложения материала;
- уровень оформления работы.

– анализ результатов.

Критерии оценивания практической работы

| Оценка | Критерии оценивания |
|---|---|
| 5 | Работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности проведения, содержит результаты и выводы, все записи, таблицы, рисунки, чертежи, графики выполнены аккуратно. Обучающийся владеет теоретическим материалом, формулирует собственные, самостоятельные, обоснованные, представляет полные и развернутые ответы на дополнительные вопросы. |
| 4 | Работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности проведения, содержит результаты и выводы, все записи, таблицы, рисунки, чертежи, графики выполнены аккуратно. Обучающийся владеет теоретическим материалом, допуская незначительные ошибки на дополнительные вопросы. |
| 3 | Работа выполнена в полном объеме, содержит результаты и выводы, все записи, таблицы, рисунки, чертежи, графики выполнены аккуратно. Обучающийся владеет теоретическим материалом на минимально допустимом уровне, допуская ошибки на дополнительные вопросы. |
| 2 | Работа выполнена не полностью. Студент практически не владеет теоретическим материалом, допускает ошибки при ответе на дополнительные вопросы. |

## 2. Тематическое планирование практических работ

| | Наименование тем | Вид и название работы студента | Количество часов на выполнение работы |
|---|---|---|---|
| **Раздел 1** | **Алгебра и начала математического анализа** | | **22** |
| | Введение | | |
| Тема 1 | Развитие понятия о числе | **Практическая работа №1** «Действия над комплексными числами» | 1 |
| Тема 2 | Уравнения и неравенства | **Практическая работа №2** «Решение систем линейных уравнений различными методами» **Практическая работа №3** «Решение квадратных уравнений и неравенств. Метод интервалов» **Практическая работа №4** «Решение рациональных и иррациональных уравнений и неравенств» | 3 |
| Тема 3 | Корни, степени и логарифмы | **Практическая работа №5** «Действия со степенями» **Практическая работа №6** «Решение показательных уравнений и неравенств» **Практическая работа №7** «Вычисление логарифмов с использованием свойств» **Практическая работа № 8** «Решение логарифмических уравнений и неравенств» | 4 |
| Тема 4 | Основы тригонометрии | **Практическая работа №9** «Решение задач на применение основных тригонометрических тождеств» **Практическая работа №10** «Применение тригонометрических формул для решения задач» **Практическая работа №11** «Решение тригонометрических уравнений и неравенств» | 3 |
| Тема 5 | Функции и графики | **Практическая работа №12** «Функции, свойства функции» **Практическая работа №13** «Решение практических задач, используя свойства функций и их графики» | 2 |
| Тема 6 | Начала математического анализа | **Практическая работа №14** «Производная, физический и геометрический смысл производной» **Практическая работа №15** «Правила дифференцирования. Дифференцирование основных элементарных функций» **Практическая работа №16** «Применение производной для исследования функции на монотонность и экстремумы» **Практическая работа №17** «Исследование функции, с помощью производной, | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | построение эскиза графика функции» | |
| Тема 7 | Интеграл и его применение | **Практическая работа №18 «**Вычисление неопределённых интегралов с использованием таблицы и основных свойств**»** | 1 |
| Тема 8 | Элементы комбинаторики | **Практическая работа №19** «Решение комбинаторных задач» | 2 |
| Тема 9 | Элементы теории вероятностей и математической статистики | **Практическая работа №20** «Вероятность события. Решение статистических задач**»** | 2 |
| **Раздел 2** | **Геометрия** | | **8** |
| Тема 10 | Координаты и векторы | **Практическая работа №21** «Построение точек, отрезков в пространстве. Вычисление расстояния между точками в пространстве»<br>**Практическая работа №22** «Действия над векторами» | 2 |
| Тема 11 | Прямые и плоскости в пространстве | **Практическая работа №23** «Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве»<br>**Практическая работа №24** «Перпендикуляр и наклонная. Теорема о трёх перпендикулярах» | 2 |
| Тема 12 | Многогранники и круглые тела | **Практическая работа №25 «**Вычисление площадей многогранников»<br>**Практическая работа №26 «**Вычисление площадей круглых тел»<br>**Практическая работа №27 «**Вычисление объёмов многогранников и круглых тел» | 4 |
| | | **Итого** | **30 часов** |

## 3. Содержание практических работ

# Тема 1: «Развитие понятия о числе»

## Практическое занятие №1 «Действия над комплексными числами»

**Цель:** Освоить выполнение действий над комплексными числами в алгебраической форме.

**Теоретические сведения по выполнению практического занятия**

*Комплексное число* – это двумерное число вида

$$z = x + iy$$

где $x$, $y$ – вещественные числа, а $i^2 = -1$ – *мнимая единица*. Первое из вещественных чисел, $x$, называется *вещественной (действительной) частью* комплексного числа (используется обозначение $x = \operatorname{Re} z$); второе, $y$, - *мнимой частью* ($y = \operatorname{Im} z$). Выражение (1.1) называют *алгебраической формой записи комплексного числа*.

$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1$$

Числом, *сопряженным* к $z = x + iy$, называют число вида $\bar{z} = x - iy$. Используя формулу разности квадратов, получаем, что $z\bar{z} = x^2 + y^2$.

Пример 1. Решить уравнение $x^2 - 6x + 18 = 0$.

Решение. Дискриминант данного уравнения: $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 36 - 72 = -36$ меньше нуля, но теперь мы можем воспользоваться мнимой единицей:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{6 \pm 6\,i}{2}, \text{ т.е. } x_1 = 3 + 3i; \quad x_2 = 3 - 3i.$$

Справедливы следующие *правила арифметических действий над комплексными числами* $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$:

1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$ (осуществляется сложение или вычитание алгебраических двучленов и приведение подобных);

2) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1 y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ (осуществляется перемножение алгебраических двучленов и приведение подобных с учетом того, что $i^2 = -1$);

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \dfrac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ (эта операция возможна только в случае, когда $z_2 \neq 0 + i0 = 0$).

Пример 2. Вычислить $z = \frac{2-7i}{3+4i}$ и указать вещественную и мнимую части полученного комплексного числа.

Решение. Действуя в соответствии с правилами получаем:

$$z = \frac{2-7i}{3+4i} = \frac{(2-7i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{6-8i-21i+28i^2}{9-16i^2} = \frac{6-29i-28}{9+16} = \frac{-22-29i}{25} = -\frac{22}{25} - \frac{29}{25}i\,;$$

поэтому $\operatorname{Re} z = -\frac{22}{25}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{29}{25}$.

***Практическое занятие (раздаточный материал содержит 6 вариантов)***

## Вариант №1

1. Изобразить на плоскости, следующие комплексные числа, заданные в алгебраической форме

   $z_1 = 3+2i$, $z_2 = -6i$, $z_3 = 4$
2. Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел

   $z_1 = -2i$ $z_2 = 9+6i$
3. Найти значение выражения $z^2 - z + 6$, где $z_2 = 1-3i$
4. Какие формы представления комплексных чисел вам известны?

## Вариант №2

1. Изобразить на плоскости, следующие комплексные числа, заданные в алгебраической форме

   $z_1 = -5+i$, $z_2 = -i-9$, $z_3 = 4$
2. Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел

   $z_1 = -2i+7$ $z_2 = 8-3i$
3. Найти значение выражения $z^2 + 2z - 1$, где $z = 5+3i$
4. Какие числа называются комплексно-сопряжёнными? Привести пример.

## Вариант №3

1. Изобразить на плоскости, следующие комплексные числа, заданные в алгебраической форме

   $z_1 = 4-7i$, $z_2 = i$, $z_3 = -9$
2. Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел

   $z_1 = 3-i$ $z_2 = -4+5i$
3. Найти значение выражения $-z^2 + 3z + 10$, где $z = -2-7i$
4. Как обозначаются комплексные числа? Является ли число7 комплексным?

## Вариант №4

1. Изобразить на плоскости, следующие комплексные числа, заданные в алгебраической форме
   $z_1 = -5 - 2i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 4 - 5i$
2. Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел
   $z_1 = -2i - 3$ $z_2 = 8$
3. Найти значение выражения $(-z)^2 + 2z + 1$, где $z = 1 + 3i$
4. Какое правило нужно соблюдать при делении комплексных чисел в алгебраической форме?

## Вариант №5

1. Изобразить на плоскости, следующие комплексные числа, заданные в алгебраической форме
   $z_1 = 2 - 9i$, $z_2 = -1 + 6i$, $z_3 = -1$
2. Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел
   $z_1 = 7 - 2i$ $z_2 = 6i$
3. Найти значение выражения $z^2 - 3z - 25$, где $z_2 = 1 + 4i$
4. Какие множества чисел включает множество комплексных чисел?

## Вариант №6

1. Изобразить на плоскости, следующие комплексные числа, заданные в алгебраической форме
   $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = -3i$, $z_3 = 4 - i$
2. Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел
   $z_1 = -5i - 1$ $z_2 = 4 + 3i$
3. Найти значение выражения $z^2 + 2(z-1)^2$, где $z = 2 + i$
4. Какие действия можно выполнять над комплексным числами в алгебраической форме.

## Тема 2 «Уравнения и неравенства»

**Цель:** Сформировать умения, решать уравнения и неравенства, различных типов: линейные, квадратные, рациональные, иррациональные, и применять данные умения при решении прикладных задач. Сформировать умения решать системы линейных уравнений 4 способами.

*Практическое занятие (раздаточный материал содержит 6 вариантов)*

## Практическое занятие №2 «Решение систем линейных уравнений различными методами»

### Вариант №1

**1.** Найти определители второго и третьего порядка

Сделать проверку.

а) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$

**2.** Перечислите все известные вам способы решения систем линейных уравнений.

**3.** Решить систему двух линейных уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 4x - y = -2 \end{cases}$

### Вариант №2

**1.** Найти определители второго и третьего порядка. Сделать проверку.

а) $\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -11 & 7 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} -4 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$

**2**. Запишите в общем виде систему из двух линейных уравнений и соответственно формулы Крамера к этой системе. В каком случае систему нельзя решать методом Крамера?

**3.** Решить систему двух линейных уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ 8x - y = 7 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2{,}5x - 3y = 1 \\ 5x - 6y = 2 \end{cases}$

### Вариант №3

**1.** Найти определители второго и третьего порядка. Сделать проверку.

а) $\begin{vmatrix} -9 & 10 \\ 10 & 1 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} 12 & 7 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$

**2.** Поясните, в чём состоит суть метода Гаусса для решения систем линейных уравнений

**3.** Решить систему двух линейных уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} 4x = 6y - 10 \\ 6x - y = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

### Вариант №4

**1.** Найти определители второго и третьего порядка. Сделать проверку.

а) $\begin{vmatrix} -8 & 5 \\ 13 & -3 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} 15 & 1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$

**2.** Поясните, в чём состоит суть графического метода для решения систем линейных уравнений.

**3.** Решить систему двух линейных уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x + y - 8 = 0 \\ 3x + 4y - 7 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y = 11 \\ y - 2x = -5 \end{cases}$

### Вариант №5

1. Найти определители второго и третьего порядка. Сделать проверку.

а) $\begin{vmatrix} -1 & -10 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} 7 & 14 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}$

2. Что такое определитель второго и третьего порядка. Где используется понятие определителя второго порядка?

3. Решить систему двух линейных уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 8x + 3y = 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y = 45 \\ x - 3y = 12 \end{cases}$

**Вариант №6**

1. Найти определители второго и третьего порядка

а) $\begin{vmatrix} 30 & -4 \\ -7 & 1 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} 16 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

2. Поясните, в чём состоит суть метода сложения для решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными.
3. Решить систему двух линейных уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} 6x-5y=7 \\ 9x-2y=5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

## Практическое занятие №3 «Решение квадратных уравнений и неравенств. Метод интервалов»

***Практическое занятие (раздаточный материал содержит 6 вариантов)***

**Вариант №1**

1. Решить квадратные уравнения:

   а) $x^2 = 3+2x$

   б) $-2x^2+4x-5=0$ с) $x^2-2x+1=0$

2. Решить квадратные неравенства методом интервалов:

   а) $x^2+2x-1>0$ б) $-x^2+3x+4\le 0$

3. Решить неравенства методом интервалов

   а) $(2x+3)(6-3x)*x^3 \le 0$

   б) $\dfrac{x(6-x)(5+x)^4}{(1-x)} \ge 0$

4. Опишите алгоритм решения неравенств методом интервалов.

**Вариант №2**

1. Решить квадратные уравнения:

а) $x^2 = 3x$ б) $x^2 - 4x - 5 = 0$ с) $4x + x^2 + 15 = 0$

2. Решить квадратные неравенства методом интервалов:

а) $x^2 - 6x + 9 < 0$ б) $-x^2 + 2x + 15 \geq 0$

3. Решить неравенства методом интервалов

а) $-(2x+3)(5-3x) * x^8 \leq 0$

б) $\dfrac{x^5(6-x)(7+x)^4}{(4+x)} < 0$

4. Опишите алгоритм решения квадратного уравнения по теореме Виета.

## Вариант №3

1. Решить квадратные уравнения:

а) $x^2 = 3x - 6$

б) $x^2 + 2x + 5 = 0$ с) $5x - 2x^2 + 6 \leq 0$

2. Решить квадратные неравенства методом интервалов и графически:

а) $x^2 + 3x + 6 < 0$ б) $3x^2 + 5x - 4 \leq 0$

3. Решить неравенство методом интервалов

а) $(4x-1)(8-5x) * x^{12} \geq 0$

б) $\dfrac{x^{11}(9-x)(4+x)^4}{(1-x)^2} < 0$

4. Какие уравнения называются квадратными, приведёнными, не приведёнными, неполными. Приведите примеры..

## Вариант №4

1. Решить квадратные уравнения:

а) $2x^2 = 5x + 4$ б) $x^2 - 64 = 0$ с) $4x + x^2 + 4 > 0$

2. Решить квадратные неравенства методом интервалов:

а) $x^2 - 10x + 25 > 0$ б) $-x^2 - 3x + 4 \geq 0$

3. Решить неравенства методом интервалов

а) $(-6x+1)(4-3x) * x^5 \leq 0$

б) $\dfrac{x^5(6-x)(7+x)^4}{4-x^2} < 0$

4. Запишите алгоритм решения неполных квадратных неравенств вида

$$x^2-c>0$$

**Вариант №5**

1. Решить квадратные уравнения:

а) $-3x^2 = 7x+4$ б) $x^2-20x=0$ с) $2x-x^2-1=0$

2. Решить квадратные неравенства методом интервалов:

а) $-2x^2-3x+1<0$ б) $-x^2+4\geq 0$

3. Решить неравенства методом интервалов

а) $(-6x+1)^{10}(7-5x)*x^8>0$

б) $\dfrac{x^5(5+x)(7+x)^2}{16-x^2}\geq 0$

4. Запишите алгоритм решения неполных квадратных неравенств вида

$$ax^2-x>0$$

**Вариант №6**

1. Решить квадратные уравнения:

а) $2x^2=5x+4$ б) $x^2+9x=0$ с) $6x+x^2-5=0$

2. Решить квадратные неравенства методом интервалов:

а) $x^2-12x+36<0$ б) $-x^2-2x+3<0$

3. Решить неравенства методом интервалов

а) $(-6x+1)(4-3x)*x^5\leq 0$

б) $\dfrac{-x^4(3+x)(4+x)^4}{1-x^2}<0$

4. Какие неравенства называются квадратными? Методы решения. Примеры.

## Практическое занятие №4 «Решение рациональных и иррациональных уравнений и неравенств»

***Практическое занятие (раздаточный материал содержит 6 вариантов)***

**Вариант №1**

**1.** Решить рациональные уравнения:

а) $x-\dfrac{2}{x}=-1$ б) $\dfrac{x^2+1}{x-4}-\dfrac{x^2-1}{x+3}=23$

**2.** Решить рациональные неравенства

а) $\dfrac{x^2-x}{x^2-5x-6}\le 0$ б) $\dfrac{4x^2-11x-21}{x^2-4x-5}>3$

**3.** Решить иррациональные уравнения

а) $\sqrt{x+2}=x-4$ б) $\sqrt{3-x}=\sqrt{x}$

**4.** Решить иррациональные неравенства

а) $\sqrt{x+1}>5$ б) $\sqrt{2x-1}<2x$

**5.** Какие уравнения называются иррациональными? Методика решения.

**Вариант №2**

**1.** Решить рациональные уравнения:

а) $x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{5}{2}$ б) $\dfrac{3x-2}{x}-\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{3x+4}{x^2-2x}$

**2.** Решить рациональные неравенства

а) $\dfrac{3x^2-4x-4}{5x^2+8x+3}\ge 0$ б) $\dfrac{10x^2-27x+18}{2x^2+9x-5}\le 0$

**3.** Решить иррациональные уравнения

а) $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}$ б) $\sqrt{x^2-9}=3x-11$

**4.** Решить иррациональные неравенства

а) $\sqrt{4-x}>0$ б) $\sqrt{x+12}<x$

**5.** Какие неравенства называются иррациональными? Методика решения.

**Вариант №3**

**1.** Решить рациональные уравнения:

а) $\dfrac{2x}{x-3}+\dfrac{11}{2}=\dfrac{3}{x}$ б) $\dfrac{5}{x+1}+\dfrac{4x-6}{(x+1)(x+3)}=3$

**2.** Решить рациональные неравенства

а) $\dfrac{3x^2-16x-12}{5x^2-x-6}>0$ б) $\dfrac{2x^2+17x+36}{x^2+6x+5}\ge\dfrac{x+4}{x+1}$

**3.** Решить иррациональные уравнения

а) $\sqrt{x+2}=\sqrt{6-x}$ б) $\sqrt{1-x}=5+x$

**4.** Решить иррациональные неравенства

а) $\sqrt{4x+1}>-3$ б) $\sqrt{7+x}<x-3$

**5.** Какие уравнения называются рациональными? Методика решения.

**Вариант №4**

**1.** Решить рациональные уравнения:

а) $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}=\frac{4-x}{x^2+2x}$ б) $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}=\frac{5}{2}$

**2.** Решить рациональные неравенства

а) $\frac{x^3-7x}{(2x+3)(3x-8)}\geq 0$ б) $\frac{x^2-10x-21}{1+x^2-2x}>0$

**3.** Решить иррациональные уравнения

а) $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}$ б) $\sqrt{x^2-9}=3x-11$

**4.** Решить иррациональные неравенства

а) $\sqrt{4-x^2}>-20$ б) $\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1$

**5.** Какие неравенства называются рациональными? Методика решения.

## Вариант №5

**1.** Решить рациональные уравнения:

а) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}=\frac{6}{x+2}$ б) $\frac{x^2-1}{x+3}-\frac{x^2+1}{x+4}=\frac{1}{x^2+7x+12}$

**2.** Решить рациональные неравенства

а) $\frac{x^3-6x^2}{5x^2-x-6}<0$ б) $\frac{x^4-4x^2}{x^2-25}\geq 0$

**3.** Решить иррациональные уравнения

а) $\sqrt{x+2}=\sqrt{6-x}$ б) $\sqrt{1-x}=5+x$

**4.** Решить иррациональные неравенства

а) $\sqrt{4x+1}>7$ б) $\sqrt{7+x}<\sqrt{x+6}$

**5.** Что такое область определения функции? Примеры.

## Вариант №6

**1.** Решить рациональные уравнения:

а) $\frac{2}{(x-1)}-\frac{1}{(x+1)}=\frac{4-x}{x^2-1}$ б) $\frac{1}{x^2+3x-3}+\frac{2}{x^2+3x+1}=\frac{7}{5}$

**2.** Решить рациональные неравенства

а) $\frac{x^3-4x}{(5x+3)(3x-7)}\geq 0$ б) $\frac{9+x^2-6x}{1+x^2-2x}<0$

**3.** Решить иррациональные уравнения

а) $\sqrt{4x^2-9}=4$ б) $\sqrt{2x}=1-x$

**4.** Решить иррациональные неравенства

а) $\sqrt{16-x^2} > -10$ б) $\sqrt{x^2+5x+3} < \sqrt{x}$

**5.** Что такое область значений функции? Примеры.

## Тема 3 Корни, степени, логарифмы

**Цель:** Сформировать умения вычислять логарифмы, решать различные упражнения со степенями, арифметическими корнями, сформировать умения решать логарифмические и показательные уравнения и неравенства

**Теоретические сведения по выполнению практической работы:**

Пусть a – любое действительное число; n – натуральное число >1. Назовём n-ой степенью числа a называется произведение n множителей каждый из которых = a. Если n=1, то по определению считают, что $a^1=a$. Числа a называется основанием степени число n-показателем степени.

Свойства степени:

1. $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$
2. $\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$ , если n>k
3. $(a^n)^k = a^{n \cdot k}$
4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5. $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$, b$\neq 0$

по определению полагают, что $a^0=1$ для любого a$\neq 0$. Нулевая степень числа 0 не определена. По определению полагают, что если a$\neq 0$ n-натуральное число, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ справедливо неравенство: $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$

Арифметическим корнем натуральной степени $n \geq 2$ из неотрицательного числа называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Арифметический корень n-й степени из числа a обозначается $\sqrt[n]{a}$. Число a называется подкоренным выражением. Если n=2, то обозначают $\sqrt{a}$.

Арифметический корень второй степени называют квадратным корнем, а корень третьей степени – кубическим корнем.

Действие, посредством которого отыскивается корень n-й степени, называется извлечением корня n-й степени. Это действие является обратным действию возведения в n-ю степень.

**Арифметический корень n-й степени обладает следующими свойствами**: если $a \geq 0, b > 0, n, m, k -$ *натуральные числа, причем* $n \geq 2, m \geq 2,$ *то*

$$1)\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} \quad \sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{81}=3$$

$$2)\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \sqrt[3]{\frac{125}{27}}=\frac{\sqrt[3]{5^3}}{\sqrt[3]{3^3}}=\frac{5}{3}$$

$$3)\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m} \quad \sqrt[7]{5^{21}}=\sqrt[7]{\left(5^3\right)^7}=5^3=125$$

$$4)\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a} \quad \sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}}=\sqrt[12]{4096}=\sqrt[12]{2^{12}}=2$$

$$5)\sqrt[kn]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m} \quad \left(\sqrt[4]{9}\right)^{-2}=\sqrt[4]{9^{-2}}=\sqrt[4]{\frac{1}{81}}=\frac{1}{3}$$

При любом значении а справедливо равенство $\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$, где к – натуральное число.

Логарифмом положительного числа b по основанию а, где а>0, а≠1, называется показатель степени, в которую следует возвести число а, чтобы получить число b.

Равенство $a^{log_a b}=b$, справедливое при b>0,a>0, a≠1 называется основным логарифмическим тождеством.

Действие нахождения логарифма числа называется логарифмированием. Действие нахождения числа по его логарифму называется потенцированием.

**Свойства логарифмов:**

$$a>0, a\neq 1, b>0, c>0, r\in R:$$

1) $log_a(bc)=log_a b+log_a c$
2) $log_a\left(\frac{b}{c}\right)=log_a b-log_a c$
3) $log_a b^r=r\cdot log_a b$
4) $log_a b=\frac{log_c b}{log_c a}$
5) $log_a a=1$
6) $log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\cdot log_a b$

Примеры:

1) $log_{48}12+log_{48}4=log_{48}(12\cdot 4)=log_{48}48=1$
2) $log_4 8-log_4 2=log_4(8:2)=log_4 4=1$
3) $log_3 4^7=7\cdot log_3 4$

$$log_9 81=log_9 9^2=2\cdot log_9 9=2\cdot 1=2$$

4) $\frac{log_7 9}{log_7 3}=log_3 9=log_3 3^2=2$
5) $log_{10}10=1$
6) $log_8 32=log_{2^3}2^5=\frac{5}{3}\cdot log_2 2=\frac{5}{3}$

Десятичный логарифм числа – это логарифм этого числа по основанию 10, обозначается lga.

Натуральный логарифм числа – это логарифм этого числа по основанию е, обозначается lna.

Число е – иррациональное число, е $\approx 2{,}718$

При решении логарифмических уравнений и неравенств используются следующие утверждения:

1) если $a>0$, $a\neq 1$, $x_1>0$, $x_2>0$, то равенство $\log_a x_1=\log_a x_2$ справедливо тогда и только тогда, когда $x_1=x_2$

2) если $a>0,\ \ x_1>0,\ \ x_2>0$, то неравенство $\log_a x_1<\log_a x_2$ справедливо тогда и только тогда, когда $x_1<x_2$

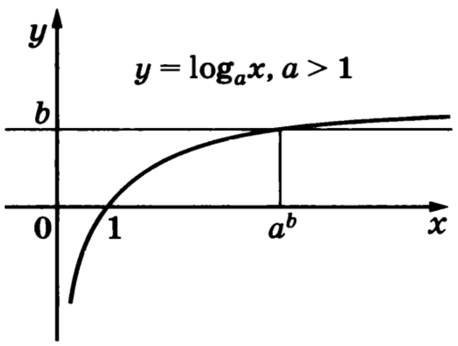
3) если $0<a<1,\ \ x_1>0,\ \ x_2>0$, то неравенство $\log_a x_1<\log_a x_2$ справедливо тогда и только тогда, когда $x_1>x_2$

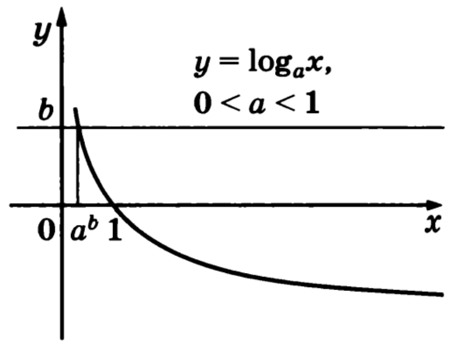
Простейшие логарифмические неравенства $\log_a x>b(*),\ \ \log_a x<b(**)$, где $a>0,\ \ a\neq 1$, имеют решения при любом $b\in R$.

Если $a>1$, то множество решений неравенства (*) – промежуток $x>a^b$, а множество решений неравенства (**) – интервал $0<x<a^b$.

Если $0<a<1$, то множество решений неравенства (*) – интервал $0<x<a^b$, а множество решений неравенства (**) – промежуток $x>a^b$.

Неравенство $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ при $a>1$ равносильно двойному неравенству $f(x)>g(x)>0$, а при $0<a<1$ - двойному неравенству $0<f(x)<g(x)$.



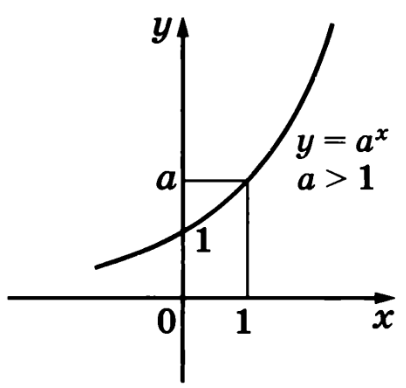



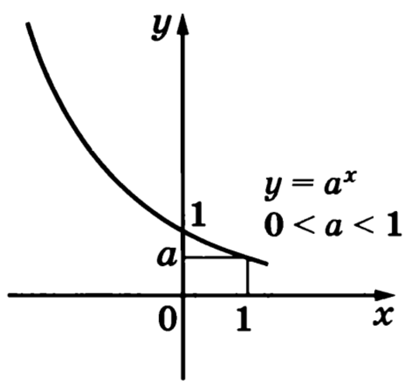

При решении показательных уравнений пользуются следующим свойством показательной функции: если $a>0, a\neq 1$, то равенство $a^{x_1}=a^{x_2}$ справедливо тогда и только тогда, когда $x_1=x_2$.

При решении показательных неравенств пользуются следующими свойствами показательной функции:

1) если $a>1$, то неравенство $a^{x_1}>a^{x_2}$ справедливо тогда и только тогда, когда $x_1>x_2$;

2) если $0<a<1$, то неравенство $a^{x_1}>a^{x_2}$ справедливо тогда и только тогда, когда $x_1<x_2$.



# Практическое занятие №5 «Действия со степенями»

## Вариант №1

1. Найдите значение выражения

   а) $\frac{2^8*7^9}{14^{10}}$ б) $\frac{26^5*2^{10}}{13^6*8^4}$ в) $\frac{28^5*2^3}{14*2^7}$

2. Извлеките корень

   а) $\sqrt[3]{27\,а^3в^{12}}$ б) $\sqrt[3]{3\,\frac{3}{8}\,а^6}$

3. Вычислите

   а) $(\frac{1}{36})^{(-\frac{1}{2})}$-$6^{-1}$+$\frac{2}{6^{-1}}$+$(\sqrt{6})^4$-$6^0$

   Представьте в виде суммы

   б) $(а^{\frac{1}{3}}-2b^3)^3$ с) $(a^{\frac{1}{3}}+3b^{-2})^3$

4. Упростить выражение

   $\sqrt{12\,a^{-4}b^3}$:$((\frac{a^3}{3b^{-4}})^{-2})^{\frac{1}{4}}$

5. Дайте определение арифметического корня. Перечислите свойства арифметических корней

## Вариант №2

1. Найдите значение выражения

   а) $\frac{4^5*8^{11}}{32^6}$ б) $\frac{10^5}{2^6*5^7}$ в) $\frac{12^5}{2^2*3^4}*\frac{10^5}{2^6*5^7}$

2. Извлеките корень

   а) $\sqrt[3]{8а^3*с^{\frac{1}{3}}}$ б) $4\sqrt{16\,с^8}$

3. Вычислите

   а) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$-$5^{-1}$+$\frac{7^{-2}}{49^{-1}}$+$(\sqrt{8})^6$

   Представьте в виде суммы

   б) $(а^{\frac{1}{3}}+3b^{\frac{2}{3}})^3$ с) $(a^{\frac{1}{2}}-b^2)^3$

4. Упростить выражение

   $\sqrt{18\,a^4b^{-2}}$:$(\left(\frac{a^6}{2b^{-4}}\right)^{-\frac{1}{2}})^{-1}$

5. Перечислите свойства степени с натуральным показателем. Приведите примеры

## Вариант №3

1. Найдите значение выражения

а) $\frac{14^{10}}{2^8 * 7^9} / \frac{13^8 * 8^4}{26^5}$ б) $\frac{12^5}{2^3 * 4^4} * 2^3$ в) $\frac{10^5}{2^6 * 5^7}$

2. Извлеките корень

а) $\sqrt[5]{32\,с^{10} * м^5}$ б) $\sqrt[4]{\frac{16x^8}{81y^4}}$

3. Вычислите

а) $\left( \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{125} \right)^2$

Представьте в виде суммы

б) $(a^{\frac{4}{3}} + b)^3$ с) $(2a^{\frac{1}{3}} + 3b^{\frac{1}{4}})^3$

4. Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{ab} \cdot \sqrt[4]{a}}{(a+2) \cdot \sqrt[4]{a^{-1} \cdot b^2}} - \frac{a^2+4}{a^2-4}$$

5. Охарактеризуйте понятие степени с действительным показателем и приведите примеры

## Вариант №4

1. Найдите значение выражения

а) $\frac{63^{10}}{3 * 9^9 * 7^8}$ б) $\frac{2^8 * 9^9}{18^7}$ в) $\frac{24^{12} * 4}{4^{10} * 6^{11} * 6}$

2. Извлеките корень

а) $\sqrt[4]{256x^{16}z^{20}}$ б) $\sqrt[6]{y^{12}z^{18}}$

3. Вычислите

а) $\left(\frac{1}{49}\right)^{\left(-\frac{1}{2}\right)} - 2^3 + \frac{4}{\sqrt{196}} - \sqrt[4]{\frac{1}{81}}$

Представьте в виде суммы

б) $(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{5}})^3$ с) $(a^{-\frac{2}{3}} + 3b^2)^3$

4. Упростить выражение

$\sqrt{18a^4b^{-2}} : \left(\left(\frac{a^6}{2b^{-4}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$

5. Охарактеризуйте понятие степени с натуральным показателем и приведите примеры

## Вариант №5

1. Найдите значение выражения

а) $\frac{56^9}{7^3*8^9}$ б) $\frac{8^7*6^{11}}{48^9}*\frac{8}{6}$ в) $\frac{11^7*19^6}{19^5*11^{10}}*\frac{11^2}{19}$

2. Извлеките корень

а) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}*a^9*c^{12}}$ б) $\sqrt[4]{81*6^{16}*1^{32}}$

3. Найдите значение выражения:

а) $\frac{3^{-1}-(\frac{2}{3})^{-2}}{2-\left(\frac{3}{4}\right)^2}\cdot(5^0-\frac{2}{7})$

представьте в виде суммы

б) $(a^{\frac{2}{3}}-b^2)^3$ с) $(a^{\frac{1}{3}}+2)^3$

4. Упростить выражение

$$\frac{(\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}})^{\frac{3}{2}}}{\sqrt[5]{a^4})^3}\cdot\frac{(\sqrt{a\sqrt[3]{a^2b}})^4}{\sqrt[4]{a\sqrt{b}}}$$

5. Что такое арифметический корень из числа? Свойства арифметических корней. Примеры.

## Вариант №6

1. Найдите значение выражения

а) $\frac{35^7}{5^6*7^8}$ б) $\frac{9^8*6^{10}}{54^{11}}*\frac{54}{6^0}$ в) $\frac{72^{15}}{8^{13}*9^{14}}*\frac{3}{8}$

2. Извлеките корень

а) $\sqrt{169*m^4*n^6}$ б) $\frac{\sqrt[5]{32*m^{20}*n^2}}{\sqrt[3]{216}}$

3. Найдите значение выражения:

а) $\frac{2\cdot(\frac{3}{2})^{-2}-2^{-1}}{3-\left(\frac{4}{3}\right)^2}\cdot(-7^0+\frac{3}{5})$

Представьте в виде суммы

б) $(a^{\frac{1}{4}}-b^3)^3$ с) $(2a^{\frac{1}{5}}+c)^3$

4. Упростить выражение

$$(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})^2-2\sqrt[3]{xy}-\frac{1}{(\sqrt[3]{y})^{-2}}$$

5. Перечислите свойства арифметических корней, приведите примеры.

## Практическое занятие №6 «Решение показательных уравнений и неравенств»

### Вариант 1

**1. Решите показательное уравнение**

а) $7^{x}=\frac{1}{343}$

б) $2^{2x}-6\cdot 2^{x}+8=0$.

с) $8^{\frac{x-1}{2}}=4^{\frac{2-x}{3}}$

**2. Решите показательное неравенство**

а) $0{,}4^{x^2-x-20}>1$ б) $2^{9x-x^2}\ge 1$

**3. Постройте график показательной функции** $y=a^{x}$**, если a>1 и перечислите по графику свойства функции**

### Вариант 2

**1. Решите показательное уравнение**

а) $3^{-1-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+3}$

б) $3^{2x}-6\cdot 3^{x}-27=0$

с) $0{,}9^{x^2-4x}=\left(\frac{10}{9}\right)^{3}$

**2. Решите показательное неравенство**

а) $(0{,}25)^{6x-x^2}>(\frac{1}{4})^{x}$ б) $4^{x}-6\cdot 2^{x}+8\ge 0$

**3. Постройте график показательной функции** $y=a^{x}$**, если 0<a<1 и перечислите по графику свойства функции.**

**Вариант 3**

**1. Решите показательные уравнения**

а) $7^{-x-8} = \frac{1}{\sqrt[3]{49}}$

б) $5^{2x-3} - 2*5^{x-2} = 3$

с) $5^{\frac{1}{x}} = 125^x$

**2. Решите показательные неравенства**

а) $(0,5)^x < \frac{1}{64}$ б) $4^{9x-x^3} \geq 1$

**3. Запишите алгоритм решения показательного уравнения, и приведите пример.**

**Вариант 4**

**1. Решите показательные уравнения**

а) $\sqrt{5^{2x+1}} = 125$ б) $\frac{1}{3}^{\frac{x+1}{2}} = 81^{\frac{(x-2)}{4}}$

с) $2^{2+x} - 2^{2-x} = 5$

**2. Решите показательные неравенства**

а) $(\frac{1}{9})^{x^2 - 2x} < 1$ б) $10^{x^2 + 2x - 1} \leq 10^{2x^2}$

**3. Запишите алгоритм решения показательного неравенства, и приведите пример.**

**Вариант 5**

**1. Решите показательные уравнения**

а) $\sqrt{9^x} = (3)^{-2}$ б) $7^{\frac{x-3}{2}} = 49^{\frac{x+1}{2}}$

с) $27*3^{4x-9} - 9^{x+1} = 0$

**2. Решите показательные неравенства**

а) $4^{1-x} - 4^x \geq 5$ б) $(\frac{1}{3})^x \leq (\frac{1}{9})^{-x-1}$

**3. Какие методы вам известны применяемые для решения показательного уравнения**

**Вариант 6**

**1. Решите показательные уравнения**

а) $\sqrt{8^{2x}} = (2)^{-4}$ б) $(\frac{1}{4})^{x-3} = 16^{-2x-1}$

с) $2^{2x+1} - 5*2^x - 88 = 0$

**2. Решите показательные неравенства**

а) $5^x + 5^{1-x} \geq 6$ б) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} > \left(\frac{5}{2}\right)^{x+2}$

**3.На, что необходимо обязательно обратить внимание при решении показательного неравенства.**

## Практическое занятие №7 «Вычисление логарифмов с использованием свойств»

### Вариант №1

1. Найти значение выражения:

а) $4\log_8 2-9$; б) $25^{\log_5 6}$;

2. Упростите выражение, пользуясь основным логарифмическим тождеством

а) $7^{3\log_7 3}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1+\log_{\frac{1}{3}}4}$; в) $(0{,}1)^{2-3lg3}$;

3. Вычислите

а) $\dfrac{\lg 8+\lg 18}{2\lg 2+\lg 3}$; б) $\log_2 2\sin\frac{\pi}{15}+\log_2 cos\frac{\pi}{15}$;

4. Упростите

а) $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_4 5}}+49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$; б) $-\log_2\log_2 2^{\frac{1}{8}}$;

5.Дайте определение логарифма. Запишите в виде логарифма число 7 и $\frac{1}{3}$

### Вариант №2

1. Найти значение выражения

а) $\frac{1}{2}^{\log_2 9}-10$ б) $6^{\log_6 34}+7$;

2. Упростите выражение, пользуясь основным логарифмическим тождеством

а) $10^{2+lg3}$; б) $4^{-2\log_4 3}$; в) $2^{1-\frac{1}{\log_3 2}}$;

3. Вычислите

а) $\frac{\log_3 16}{\log_3 4}$; б) lg(tg4)+lg(ctg4);

4. Упростите и вычислите

а) $-\log_3\log_3\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$; б) $81^{\frac{1}{\log_5 3}}+27^{\log_9 36}$;

5. Запишите основное логарифмическое тождество и представьте число 2 и 3 в виде основного логарифмического тождества

## Вариант №3

1. Найти значение выражения

а) $1-\log_5 \frac{1}{125}$ б) $8-4^{\log_4 7}$;

2. Упростите выражение, пользуясь основным логарифмическим тождеством

а) $8^{2-\log_3 8}$; б) $12^{-1-\log_{12} 2}$; в) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2\log_{\frac{1}{4}} 6}$;

3. Вычислите

а) $\frac{\log_6 32}{\log_6 2}$; б) $\log_3 sin^2 3+\log_3 cos^2 3$;

4. Вычислите

а)-2lglg$\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$; б) $36^{\frac{1}{\log_3 6}}+\frac{1}{125}^{\log_5 2}$;

5. Запишите формулу перехода к новому основанию логарифма к основанию 4

а) $\log_7 12$; б) $\log_6 3$;

## Вариант №4

1.Найти значение выражение

а) $49^{\log_7 8}$ б) $9-\log_3 9$

2. Упростите выражение, пользуясь основным логарифмическим тождеством

а) $10^{-2lg\frac{1}{3}}$; б) $4^{2+\frac{1}{\log_3 4}}$; в) $e^{2ln4}$;

3. Вычислите

а) $\frac{\log_3 2+\log_3 4}{3\log_3 2}$; б) $\log_4 sin^2 2+\log_4 cos^2 2$;

4. Упростите и вычислите

а) $81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125} 8}$; б) $(2\log_{12} 2+\log_{12} 3)(2\log_{12} 6-\log_{12} 3)$;

5. Запишите свойство логарифмов №2 и №3 и придумайте на каждое свойство по одному примеру

## Вариант №5

1.Найти значение выражения:

а) $\log_4 \frac{1}{16}$-8;   б) $5^{\log_5 25}$+6

2. Упростите выражение, пользуясь основным логарифмическим тождеством

а) $5^{-2\frac{1}{\log_2 5}}$;   б) $27^{-1-\log_3 2}$;  в) $100^{lg3}$;

3. Вычислите

а) $\frac{3lg2+3lg5}{lg13-lg130}$;   б) $\frac{\log_6 7}{\log_6 49}$;

4. Упростите

а) $2^{4\log_4 a} - 5^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}} a} - a^0$;  б) $36^{\frac{1}{2}-\log_6 5} + 2^{-\frac{1}{lg2}}$;

5. Что означает операция “логарифмирование”? Дайте определение натурального и десятичного логарифма. Обозначение

## Вариант №6

1. Найти значение выражения:

а); $169^{\log_{13} 5}$   б) $\log_9 81$-9

2. Упростите выражение, пользуясь основным логарифмическим тождеством

а) $11^{-1-\frac{1}{\log_{121} 11}}$; б) $5^{-2\log_5 6}$;   в) $7^{-\frac{1}{2}\log_7 3+1}$;

3. Вычислите

а) $\frac{\log_4 24-\log_4 6}{2lg0,1}$;  б) ln(tg7)+ln(ctg 7);

4. Упростите и вычислите

а) $2\log_4 10 + \frac{3}{4}\log_4 81 - \frac{2}{3}\log_4 125$; б) $36^{\log_6 5} + 10^{1-lg2} - 3^{\log_9 36}$;

5. Дайте определение логарифма. Какие значения могут принимать в обозначении логарифма $\log_a b$ переменные a и b?

# Практическое занятие №8 «Решение логарифмических уравнений и неравенств»

## Вариант 1

**1. Решите логарифмические уравнения**

а) $\log_3 x=\log_3(1{,}5+x)+\dfrac{1}{\log_8 3}$

б) $\log_5(x+1)+\log_5(2x+3)=1$

**2. Решите логарифмические неравенства**

а) $\log_3(12-2x-x^2)>2$

б) $\log_{\frac{1}{5}}(4x+6)\le\log_{\frac{1}{5}}2x$

**3. Запишите алгоритм решения логарифмического уравнения.**

## Вариант 2

**1. Решите логарифмические уравнения**

а) $\log_3(4x-5)=\dfrac{1}{\log_8 3}+\log_3(1-3x)$

б) $\lg(x-6)-\lg 2=\lg 3+\lg(x-10)$

**2. Решите логарифмические неравенства**

а) $\log_4(x+1)+\log_4 x<\log_4 2$ б) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)<2$

**3. Запишите алгоритм решения логарифмического неравенства.**

## Вариант 3

**1. Решите логарифмические уравнения**

а) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x+1)=81$

б) $\log_5(x+1)+\log_5(x-1)=1$

**2. Решите логарифмические неравенства**

а) $\lg(x^2+19)>2$

б) $\lg 7+\lg(-8x-x^2)>0$

**3.Перечислите способы решения логарифмических уравнений**

## Вариант 4

**1. Решите логарифмические уравнения**

а) $\log_2(x+2)+\log_2(x+3)=1$

б) $\log_{\frac{1}{6}}(x^3-21)=-1$

**2. Решите логарифмические неравенства**

а) $\lg(x+5)>\lg(2x-6)$

б) $\log_3 2x^2<\log_3(7x-2)$

**3.Перечислите свойства логарифмической функции и постройте соответствующие графики.**

## Вариант 5

**1. Решите логарифмические уравнения**

а) $\log_2(x^2-4)=5$ б) $\log_{\frac{5}{6}}(x-1)+\log_{\frac{5}{6}}(4x+1)=0$

**2. Решите логарифмические неравенства**

а) $\log_2(2x+1)>-4$

б) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x)\geq-3$

**3.В чем состоит суть метода потенцирования, при решении логарифмических уравнений. Приведите примеры.**

## Вариант 6

**1. Решите логарифмические уравнения**

а) $\log_{\frac{1}{4}}(2x^2+x-2)=-1$ б) $\log_3(x+6)+\log_3(x-6)=1$

**2. Решите логарифмические неравенства**

а) $\log_{\frac{1}{8}}(5x^2-1)>-1$

б) $\log_3(5x-1)>1$

**3.Как влияет убывание логарифмической функции или наоборот возрастание, на решение логарифмического неравенства.**

## Тема 3 Основы тригонометрии

**Практическое занятие №9 «Решение задач на применение основных тригонометрических тождеств»**

**Практическое занятие №10 «Применение тригонометрических формул для решения задач»**

**Практическое занятие№11 «Решение тригонометрических уравнений и неравенств»**

**Цель:** сформировать умение переводить меру угла из градусной в радианную, и наоборот; сформировать понятие поворота точки вокруг начала координат на данный угол; сформировать определения понятий синуса, косинуса и тангенса углов; умение находить знаки синусов, косинусов и тангенсов в различных четвертях; сформировать определения понятия основного тригонометрического тождества; научиться доказывать тригонометрические тождества; сформировать умение применять различные формулы тригонометрии для преобразования и нахождения значений тригонометрических выражений сформировать умение решать простейшие тригонометрические уравнения и неравенства

**Теоретические сведения по выполнению практической работы:**

Каждой точке прямой ставится в соответствие некоторая точка окружности.
Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в один радиан.

$$1\,\text{рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ, \quad \alpha\,\text{рад} = \left(\frac{180}{\pi}\cdot\alpha\right)^\circ,$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\,\text{рад}, \quad \alpha^\circ = \frac{\pi}{180}\cdot\alpha\,\text{рад}.$$

Угол в α радиан стягивает дуга, длина которой l вычисляется по формуле l=αR, где R – радиус окружности.
Пример: Найти радианную меру угла, выраженного в градусах: 6°, 30°

$$6^\circ = 6\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{6\pi}{180} = \frac{\pi}{30}$$

$$30^\circ = 30\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

Пример: Найти радианную меру угла, выраженного в градусах: $\frac{\pi}{2}, \quad 0,3\pi \quad 3\text{рад}$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{180}{\pi} = 90°$$

$$0,3\pi = 0,3\pi \cdot \frac{180}{\pi} = 54°$$

$$3 = 3 \cdot \frac{180}{\pi} \approx 3 \cdot \frac{180}{3,14} \approx 171,97°$$

Таблица углов

| **Градусы** | **0** | **30** | **45** | **60** | **90** | **120** | **135** | **150** | **180** | **270** | **360** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Радианы** | **0** | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |

**Синусом** угла α называется ордината точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α.

**Косинусом** угла α называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α.

**Тангенсом** угла α называется отношение синуса угла α к его косинусу.

$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad tg(-\alpha) = -tg\alpha, \quad ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$$

Знаки тригонометрических функций

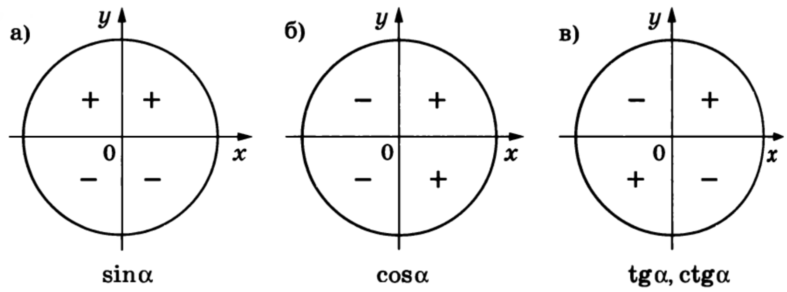



Таблица значений тригонометрических функций

| **Градусы α** | **0** | **30** | **45** | **60** | **90** | **180** | **270** | **360** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Радианы α** | **0** | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| $\sin\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | -1 | 0 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 | 0 | 1 |
| $tg\alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - | 0 | - | 0 |
| $ctg\alpha$ | - | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | - | 0 | - |

Пример. Вычислить $3\cdot tg\dfrac{\pi}{4}+\cos\pi+\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

Решение. $3tg\dfrac{\pi}{4}+\cos\pi+\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=3\cdot1+(-1)+\left(-\dfrac{1}{2}\right)=3-1-\dfrac{1}{2}=1{,}5$

Формулами сложения называются формулы, выражающие $cos(\alpha\pm\beta), sin(\alpha\pm\beta)$ через синусы и косинусы углов α и β.

1) $cos(\alpha+\beta)=cos\alpha cos\beta-sin\alpha sin\beta$
2) $cos(\alpha-\beta)=cos\alpha cos\beta+sin\alpha sin\beta$

$$cos(\alpha-\beta)=cos\big(\alpha+(-\beta)\big)=cos\alpha cos(-\beta)-sin\alpha sin(-\beta)$$
$$=cos\alpha cos\beta+sin\alpha sin\beta$$

3) $sin(\alpha+\beta)=sin\alpha cos\beta+cos\alpha sin\beta$
4) $sin(\alpha-\beta)=sin\alpha cos\beta-cos\alpha sin\beta$

$$sin(\alpha-\beta)=sin\big(\alpha+(-\beta)\big)=sin\alpha cos(-\beta)+cos\alpha sin(-\beta)$$
$$=sin\alpha cos\beta-cos\alpha sin\beta$$

5) $tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{sin(\alpha+\beta)}{cos(\alpha+\beta)}=\frac{sin\alpha cos\beta+cos\alpha sin\beta}{cos\alpha cos\beta-sin\alpha sin\beta}==\frac{\dfrac{sin\alpha cos\beta}{cos\alpha cos\beta}+\dfrac{cos\alpha sin\beta}{cos\alpha cos\beta}}{\dfrac{cos\alpha cos\beta}{cos\alpha cos\beta}-\dfrac{sin\alpha sin\beta}{cos\alpha cos\beta}}$$
$$=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

6) $tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$

Пример: Вычислить: 1) $\sin15°$ 2) $\cos(60°+45°)$
Решение:

1) $\sin15°=\sin(45°-30°)=\sin45°\cos30°-\cos45°\sin30°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2) $\cos(60°+45°)=\cos60°\cos45°-\sin60°\sin45°=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}-\dfrac{\sqrt{6}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

**Формулы синуса, косинуса и тангенса двойного угла.**

1) $sin2\alpha=2sin\alpha cos\alpha$

$$sin2\alpha=sin(\alpha+\alpha)=sin\alpha cos\alpha+cos\alpha sin\alpha=2sin\alpha cos\alpha$$

2) $cos2\alpha=cos^2\alpha-sin^2\alpha$

$$cos2\alpha = cos(\alpha+\alpha) = cos\alpha cos\alpha - sin\alpha sin\alpha$$
$$= cos^2\alpha - sin^2\alpha$$

3) $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$$tg2\alpha = tg(\alpha+\alpha) = \frac{tg\alpha + tg\alpha}{1 - tg\alpha \cdot tg\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

**Формулы приведения**

| рад | $\frac{\pi}{2}-\alpha$ | $\frac{\pi}{2}+\alpha$ | $\pi-\alpha$ | $\pi+\alpha$ | $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ | $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ | $2\pi-\alpha$ | $2\pi+\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| град | $90°-\alpha$ | $90°+\alpha$ | $180°-\alpha$ | $180°+\alpha$ | $270°-\alpha$ | $270°+\alpha$ | $360°-\alpha$ | $360°+\alpha$ |
| $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ |
| $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ |
| $tg\alpha$ | $ctg\alpha$ | $-ctg\alpha$ | $-tg\alpha$ | $tg\alpha$ | $ctg\alpha$ | $-ctg\alpha$ | $-tg\alpha$ | $tg\alpha$ |
| $ctg\alpha$ | $tg\alpha$ | $-tg\alpha$ | $-ctg\alpha$ | $ctg\alpha$ | $tg\alpha$ | $-tg\alpha$ | $-ctg\alpha$ | $ctg\alpha$ |

**Формулы тригонометрии**

## Практическое занятие №9 «Решение задач на применение основных тригонометрических тождеств»

### Вариант №1

**1. Вычислите:**

**а)** $\dfrac{tg\frac{\pi}{3}}{ctg\frac{\pi}{6}} - \sqrt{2}\cos(\frac{3\pi}{4})$ **б)** $\sin 810° - \cos(-\frac{3\pi}{2}) - 2tg(-540°)$

**2. Известно, что** $tg\alpha = \frac{3}{4}$, $180° < \alpha < 270°$

**Найдите значения трёх других тригонометрических функций угла** $\alpha$

**3.Упростите выражение:** $\dfrac{\sin(\pi - \alpha)\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha)ctg(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{-1 + \cos^2\alpha} tg(\pi - \alpha)$

**4. Докажите тождество:** $\dfrac{1 + tg\alpha}{1 + ctg\alpha} = tg\alpha$

**5. Постройте график функции** $y = \sin x$**, укажите чётность функции, какой признак на графике на это указывает, а также период**

### Вариант №2

**1. Вычислите:**

**а)** $\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}}{ctg\frac{\pi}{3}} + \sqrt{3}\cos(-\frac{3\pi}{2})$ **б)** $\sin 750° + 2\cos(-\frac{5\pi}{2}) - 2tg(-770°)$

**2. Известно, что** $ctg\alpha = \frac{4}{3}$, $180° < \alpha < 270°$

**Найдите значения трёх других тригонометрических функций угла** $\alpha$

**3.Упростите выражение:** $\dfrac{\sin(\pi + \alpha)\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)tg(\alpha - \frac{\pi}{2})}{1 + tg^2\alpha} tg^2(\alpha - \pi)$

**4. Докажите тождество:** $ctg^2\alpha - \cos^2\alpha = ctg^2\alpha\cos^2\alpha$

**5. Постройте график функции** $y = \cos x$**, укажите чётность функции, какой признак на графике на это указывает, а также период**

### Вариант №3

**1. Вычислите:**

**а)** $\dfrac{tg\frac{\pi}{6}}{ctg\frac{\pi}{3}} + \sqrt{2}\sin(\frac{3\pi}{4})$ **б)** $\sin 530° - \cos(-\frac{25\pi}{9}) - 2tg(-\frac{9\pi}{4})$

**2. Известно, что** $tg\alpha = \frac{7}{24}$, $180° < \alpha < 270°$

**Найдите значения трёх других тригонометрических функций угла** $\alpha$

**3.Упростите выражение:** $\frac{tg(90^\circ - \alpha)\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)ctg(\alpha - 2\pi)}{-\sin(\alpha - 180°)} tg(-\alpha)$

**4. Докажите тождество:** $\frac{\cos^2\alpha}{1 - \sin\alpha} - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \sin\alpha$

**5. Постройте график функции** $y = tgx$**, укажите чётность функции, какой признак на графике на это указывает, а также период**

## Вариант №4

1. **Вычислите:**

**а)** $\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{ctg(-\frac{\pi}{6})} + \sqrt{3}tg(-120^\circ)$ **б)** $\cos 750° + 2\cos(-\frac{2\pi}{3}) - 2ctg(-510°)$

**2. Известно, что** $ctg\alpha = -\frac{21}{20}$, $90° < \alpha < 180°$

**Найдите значения трёх других тригонометрических функций угла** $\alpha$

**3.Упростите выражение:** $\frac{ctg(\pi - \alpha)\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha)\sin(\alpha - 2\pi)}{\sin(-\alpha)} ctg^2(\alpha + \pi)$

**4. Докажите тождество:** $\frac{\sin^2\alpha}{1 + \cos\alpha} + \sin\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

**5. Постройте график функции** $y = ctgx$**, укажите чётность функции, какой признак на графике на это указывает, а также период**

## Вариант №5

**1. Вычислите:**

**а)** $\frac{\sin\frac{7\pi}{2}}{\cos 2\pi} + \frac{2}{3}\sin(-\frac{\pi}{4})$ **б)** $\sin 405° - \cos(-\frac{5\pi}{3}) - 3ctg(\frac{5\pi}{4})$

**2. Известно, что** $tg\alpha = \frac{15}{18}$, $180° < \alpha < 270°$

**Найдите значения трёх других тригонометрических функций угла** $\alpha$

**3.Упростите выражение:** $\frac{ctg(90^\circ - \alpha)\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)tg(\alpha - 2\pi)}{-\sin^2(-\alpha)} tg(-\alpha)$

**4. Докажите тождество:** $\frac{1 - \cos^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha} - tg^2\alpha \cdot ctg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

**5. Градусная и радианная мера угла. Перевод из одной меры в другую. Привести по два примера.**

**Вариант №6**

**1. Вычислите:**

**а)** $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{tg(-\frac{\pi}{3})}-\sqrt{2}tg(\frac{19\pi}{6})$ **б)** $\cos 450^\circ + 2ctg(-\frac{\pi}{3}) - 6cos(390^\circ)$

**2. Известно, что** $ctg\alpha = -\frac{9}{40}$**,** $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

**Найдите значения трёх других тригонометрических функций угла** $\alpha$

**3.Упростите выражение:** $\dfrac{tg^2(2\pi-\alpha)\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)\sin(\alpha-2\pi)}{-\cos^2(-\alpha)}ctg^2(\alpha-\frac{3}{2}\pi)$

**4. Докажите тождество:** $\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{tg^2\alpha+\cos^2\alpha}-\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=1$

**5. Дайте определение тригонометрических функций и перечислите основные тригонометрические тождества.**

## Практическое занятие№10 «Применение тригонометрических формул для решения задач»

**Вариант №1**

**А1.** Найдите значение выражения $3\sin^2 x - 1$, если $\cos^2 x = 0{,}5$

1) 0,5 2) –1,5 3) 1,25 4) –0,5.

**А2.** Упростите выражение $7\cos^2\alpha - 5 + 7\sin^2\alpha$

1) $1+\cos^2\alpha$ 2) 2 3) –12 4) 12.

**А3.** Упростите выражение $\cos^2(\pi-\alpha)+\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$

1) 1 2) $2\cos^2\alpha$ 3) $2\sin^2\alpha$ 4) 0.

---

**В1.** Вычислите: а) $\sin\dfrac{5\pi}{6}$ б) $\cos\left(-\dfrac{9\pi}{4}\right)$

в) $tg\dfrac{5\pi}{4}$ г) $ctg\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

**В2.** Определите знак выражения

$\sin(-1)\cdot\cos 2\cdot tg(-3)\cdot ctg 4$.

**В3.** Известно, что $ctg\alpha = -2$. Найдите $\dfrac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{5\sin\alpha - \cos\alpha}$.

---

**С1.** Упростите выражение:

$$\frac{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{\sin^2\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}-1\right)\left(tg^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1\right)}{ctg^2\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+1}$$

## Вариант №2

**А1.** Найдите значение выражения $2 - tg^2 x \cdot \cos^2 x$, если $\sin x = 0{,}1$

1) 2,1  2) 1,9  3) 2,99  4) 1,99.

**А2.** Упростите выражение $\cos^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

1) $\cos 2x$  2) $2\sin^2 x$  3) $\cos^2 x$  4) $\cos^4 x$.

**А3.** Упростите выражение $\dfrac{\sin^2(1{,}5\pi+\alpha)}{ctg^2(\pi+\alpha)} + \dfrac{\sin^2(-\alpha)}{tg^2(\pi+\alpha)}$

1) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$  2) 0  3) $2\cos^2\alpha$  4) 1.

---

**В1.** Вычислите: а) $\sin\dfrac{13\pi}{6}$  б) $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)$  в) $tg\dfrac{3\pi}{4}$  г) $ctg\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

**В2.** Определите знак выражения

$\sin 1 \cdot \cos(-2) \cdot tg 3 \cdot ctg(-4)$.

**В3.** Известно, что $ctg\alpha = -2$. Найдите $\dfrac{2\cos^2\alpha - 7\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha}$.

---

**С1.** Упростите выражение:

$$\frac{\cos^2(x-0{,}5\pi)ctg^2(x+0{,}5\pi)}{(\cos(x+0{,}5\pi)+ctg(x-0{,}5\pi))(ctg(x-0{,}5\pi)-\cos(x+0{,}5\pi))}.$$

## Практическое занятие№11 «Решение тригонометрических уравнений и неравенств»

### Вариант №1

**1. Решите уравнения:**

**а)** $\sin(5x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$

**б)** $\cos(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

**в)** $tg\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

**г)** $\sin 3x=-2.3$

**д)** $\cos(5x-\frac{\pi}{3})=0$

**е)** $tg(6x+\frac{\pi}{3})=-1$

**ж)** $2ctg^2x+3ctgx-2=0$

**з)** $\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x\cos x=0$

**2. Решите неравенства**

**а)** $\sin 4x\geq -\frac{1}{2}$ **б)** $\cos\left(\frac{x}{9}\right)\geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

### Вариант №2

**1. Решите уравнения:**

**а)** $\sin(5x-\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

**б)** $\cos(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{2}$

**в)** $tg\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$

**з)** $\cos^2 x+2\sin x\cos x=0$

**г)** $\cos 3x=1.3$

**д)** $\sin(4x-\frac{\pi}{3})=1$

**е)** $tg(2x+\frac{\pi}{4})=1$

**ж)** $2ctg^2x+ctgx-1=0$

**2. Решите неравенства**

**а)** $\sin 3x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$ **б)** $\cos(\frac{x}{2})\leq-\frac{1}{2}$

### Вариант №3

**1. Решите уравнения:**

**а)** $\sin(2x-\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}$

б) $\cos(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{2}}{2}$

в) $tg\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

г) $\sin 6x=\frac{9}{8}$ д) $\cos(4x+\frac{\pi}{3})=-1$

е) $tg(3x+\frac{\pi}{6})=1$

ж) $2\sin^2 x+3\sin x-2=0$

з) $\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x=0$

**2. Решите неравенства**

а) $\sin x\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$ б) $\cos\left(\frac{x}{3}\right)\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$

## Вариант №4

**Решите уравнения:**

а) $\sin(3x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{3}}{2}$

б) $\cos(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}$

в) $tg\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$

г) $\cos 3x=-\frac{5}{3}$ д) $\sin(4x-\frac{\pi}{3})=0$

е) $tg(2x-\frac{\pi}{6})=-1$

ж) $2\cos^2 x+\cos x-1=0$

з) $\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x\cos x=0$

**2. Решите неравенства**

а) $\sin x\geq-\frac{\sqrt{2}}{2}$ б) $\cos 4x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$

## Вариант №5

**1. Решите уравнения:**

а) $\cos(2x-\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}$

б) $\sin(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{2}}{2}$

в) $tg\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

г) $\cos 6x=-\frac{9}{8}$

д) $\sin(4x-\frac{\pi}{3})=1$

е) $tg(3x-\frac{\pi}{6})=-1$

ж) $-4\sin^2 x-6\sin x+4=0$

з) $2\cos^2 x+\sin x\cos x=0$

**2. Решите неравенства**

а) $\sin x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$ б) $\cos\left(\frac{x}{3}\right)\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$

**Вариант №6**

**1. Решите уравнения:**

**а)** $\sin(2x+\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

**б)** $\cos(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$

**в)** $tg\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

**г)** $\cos 4x=-\frac{8}{3}$ **д)** $\sin(7x+\frac{\pi}{3})=-1$

**е)** $tg(2x+\frac{\pi}{6})=1$

**ж)** $2\sin^2 x+\sin x-1=0$

**з)** $\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x\sin x=0$

**2. Решите неравенства**

**а)** $\sin 3x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$ **б)** $\cos\frac{x}{2} \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$

## Тема 5 Функции и их свойства

**Цель:** сформировать умение применять знания о степенной, показательной, логарифмической, функции, тригонометрических функций и функций обратных к тригонометрическим их свойствах при построении графиков и решении задач.

### Теоретические сведения к практической работе:

Степенная функция – это функция вида $y=x^p$, $p-$заданное действительное число.

| Функция $y=x^p$ | Область определения | Множество значений | Чётность, нечётность | Возрастание | Убывание |
|---|---|---|---|---|---|
| $p=2n$, $n\in N$ | $R$ | $y\geqslant 0$ | чётная | $x\geqslant 0$ | $x\leqslant 0$ |
| $p=2n-1$, $n\in N$ | $R$ | $R$ | нечётная | $x\in R$ | — |
| $p=-2n$, $n\in N$ | $R$, $x\neq 0$ | $y>0$ | чётная | $x<0$ | $x>0$ |
| $p=-(2n-1)$, $n\in N$ | $R$, $x\neq 0$ | $R$, $y\neq 0$ | нечётная | — | $x<0$, $x>0$ |
| $p>0$, $p\in R$, $p$ — нецелое | $x\geqslant 0$ | $y\geqslant 0$ | — | $x\geqslant 0$ | — |
| $p<0$, $p\in R$, $p$ — нецелое | $x>0$ | $y>0$ | — | — | $x>0$ |

сформировать умение находить взаимно обратные функции.

Если функция $y = f(\text{x})$ принимает каждое свое значение только при одном значении x, то эту функцию называют обратимой.

Для нахождения функции, обратной к функции $y = f(\text{x})$, нужно решить уравнение $f(\text{x}) = \text{y}$ относительно x (если это возможно), а затем поменять местами x и y. Если это уравнение имеет более одного корня, то функции, обратной к функции $y = f(\text{x})$, не существует.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = \text{x}$.

Пример: найти функцию, обратную к данной $1) y = x^7 - 1 \quad 2) y = \dfrac{1}{x-3}$

Решение:

$$1) y = x^7 - 1 \quad 2) y = \frac{1}{x-3}$$

$$x^7 = y + 1 \quad x - 3 = \frac{1}{y}$$

$$x = \sqrt[7]{y+1} \quad x = \frac{1}{y} + 3$$

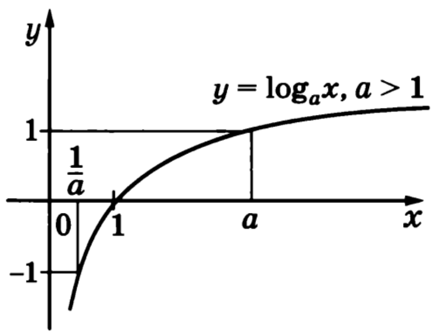
$$y = \sqrt[7]{x+1} \quad y = \frac{1}{x} + 3$$

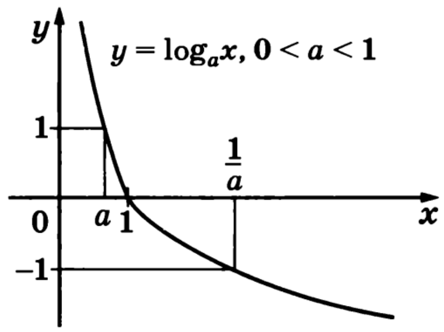
сформировать умение строить и читать графики показательных и логарифмических функций, использовать свойства функций при решении задач

**Логарифмическая функция – это функция вида** $y = \log_a x$, $a -$ **заданное число,** $a > 0$, $a \neq 1$.

Свойства логарифмической функции:

1. Область определения – множество всех положительных чисел (x>0).
2. Множество значений – множество всех действительных чисел ( $y \in R$ ).
3. График функции проходит через точку (1;0).
4. На промежутке x>0 функция является при a>1 возрастающей, при 0<a<1 убывающей.
5. Функция принимает положительные значения (y>0) при a>1 при x>1, при 0<a<1 при 0<x<1.
6. Функция принимает отрицательные значения (y<0) при a>1 при 0<x<1, при 0<a<1 при x>1.

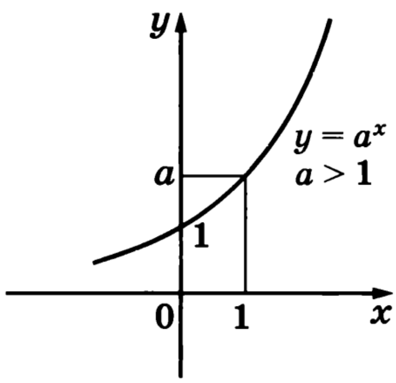


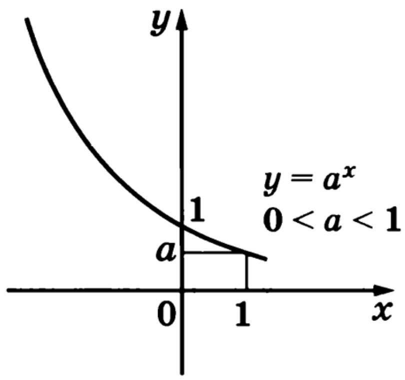




**Показательная функция – это функция вида $y = a^x$, где а – заданное число,** $a > 0,\quad a \neq 1$.

**Свойства показательной функции:**

1. Область определения – множество всех действительных чисел ($x \in R$).
2. Множество значений – множество всех положительных чисел ($y > 0$).
3. График функции проходит через точку (1;0).
4. Функция возрастающая при a>1; убывающая при 0<a<1.

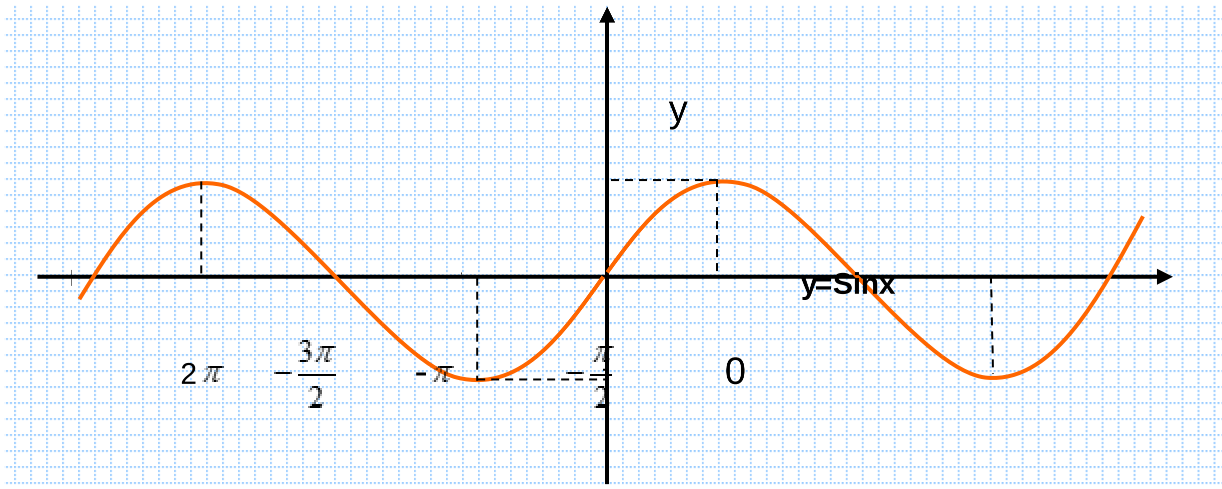



**Тема: Тригонометрическая функция. Её свойства и графики.**

**Функция y = sin x**

Функция, заданная формулой y = sin x, называется синусом.



**Свойства функции y = sin x**

**Свойства функции y = sin x (рис.1)**

1. $x \in (-\infty; +\infty), \quad y \in [-1, 1]$

2. нечетная, непрерывная, периодическая с периодом $T = 2\pi n, n \in Z$

3. нули функции в точках $x = \pi n . n \in Z$

4. возрастает при $x \in \left[\frac{-\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in Z$

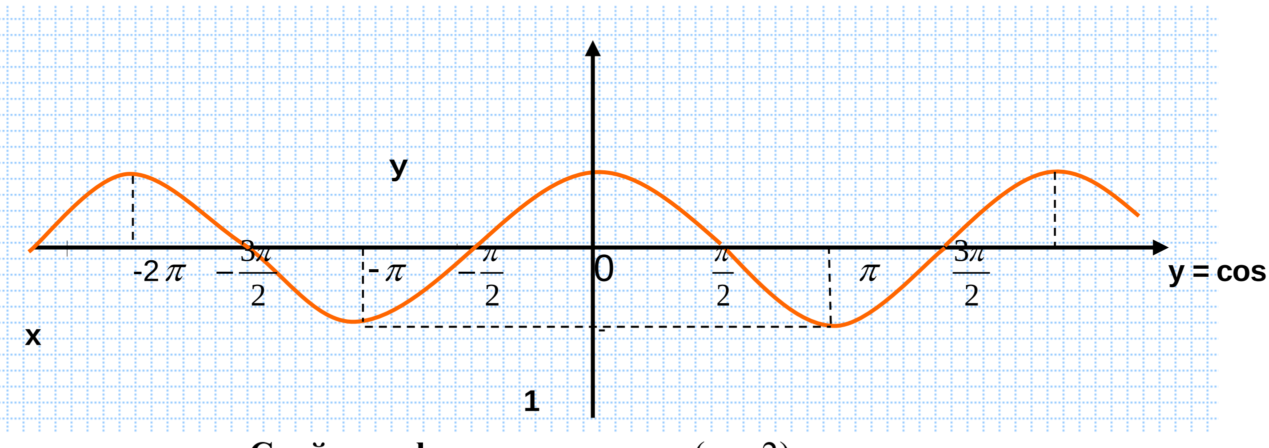
5. убывает при $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in Z$

6 . принимает наибольшее значение 1 в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

7. принимает наименьшее значение -1 в точках $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

**Функция y = cos x**

Функция, заданная формулой y = cos x, называется косинусом.




**Свойства функции y = cos x** (рис.2)

1. $x \in (-\infty; +\infty), \quad y \in [-1, 1]$

2. четная, непрерывная, периодическая с периодом $T = 2\pi n, n \in Z$

3. нули функции в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi n . n \in Z$

4. возрастает при $x \in [-\pi + 2\pi n, 2\pi n], n \in Z$

5. убывает при $x \in [2\pi n, \pi + 2\pi n], n \in Z$

6. принимает наибольшее значение 1 в точках $x = 2\pi n, n \in Z$

7. принимает наименьшее значение - 1 в точках $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

**Функция y = tg x**

Функция, заданная формулой y = tg x, называется тангенсом.

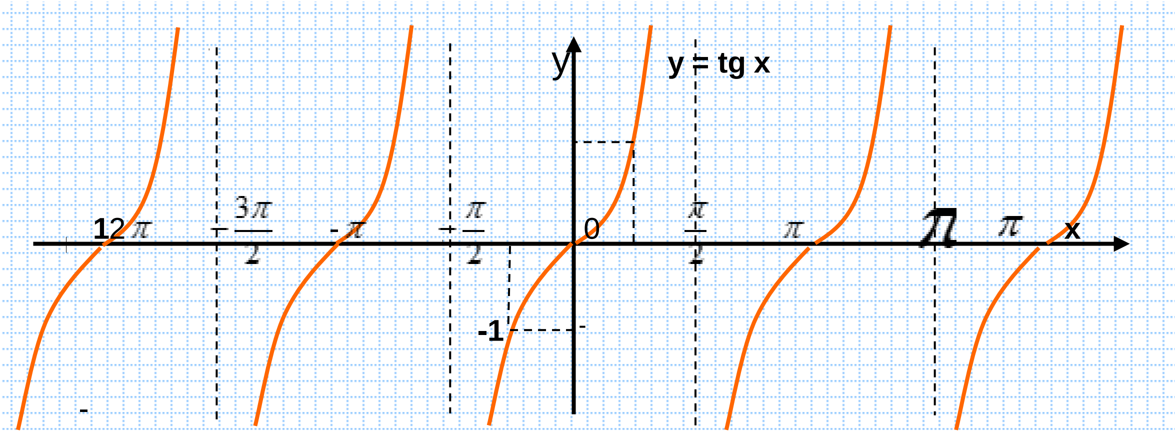



рис.1

Свойства функции y = tg x (рис.4)

1. $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, -\frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$, $y \in (-\infty; +\infty)$

2. нечетная, непрерывная, периодическая с периодом $T = \pi n, n \in Z$

3. нули функции в точках $x = \pi n . n \in Z$

4. возрастает при $x \in \left[\frac{-\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right], n \in Z$

**Свойства взаимно обратных функций**

1.Всякая возрастающая функция имеет обратную, которая тоже является возрастающей.

2. Всякая убывающая функция имеет обратную, которая тоже является убывающей.

3. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой y = x.

**Правило.** Для того, чтобы задать формулой функцию, обратную данной, надо:

1) выразить $x$ через $y$;

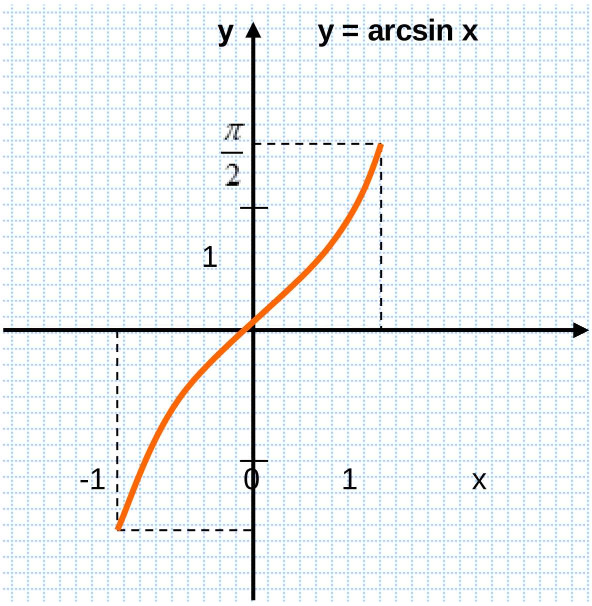
2) поменять обозначения: $x$ на $y$, а $y$ на $x$.

**Функция y = arcsinx**

Арксинусом числа $a$ называется угол из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен $a$ (обозначается $arcsin\ a$).

**Функция y = arcsin x**

Функция y = sin x возрастает в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, значит, имеет в этом промежутке обратную функцию, которая называется арксинусом и обозначается y = arcsin x (рис.1).




Свойства функции y = arcsin x

1) область определения - $[-1;1]$;

2) область значений - $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

3) нечетная, непрерывная;

4) возрастающая.

**Функция y = arccosx**

Арккосинусом числа а называется угол из промежутка $[0;\pi]$, косинус которого равен а (обозначается arccos a) .

**Функция y = arccos x**

Функция $y = \cos x$ убывает на промежутке $[0;\pi]$, а, значит, имеет на этом промежутке обратную функцию, которая называется арккосинусом и обозначается у = arccos x (рис.6) .

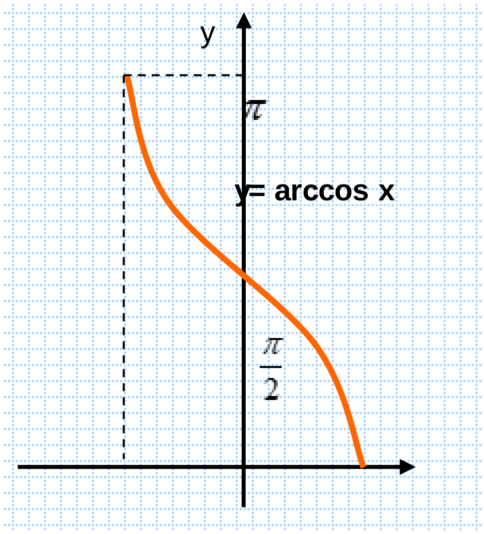



рис.2

Свойства функции y = arccos x

1) область определения - $[-1;1]$;

2) область значений - $[0;\pi]$;

3) ни четная, ни нечетная,

4) непрерывная;

**Функция y = arctgx**

Арктангенсом числа *a* называется угол из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен *a* (обозначается arctg a).

**Функция y = arctg x**

Функция y = tg x возрастает в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, значит, имеет в этом промежутке обратную функцию, которая называется арктангенсом и обозначается y = arctg x (рис.3).

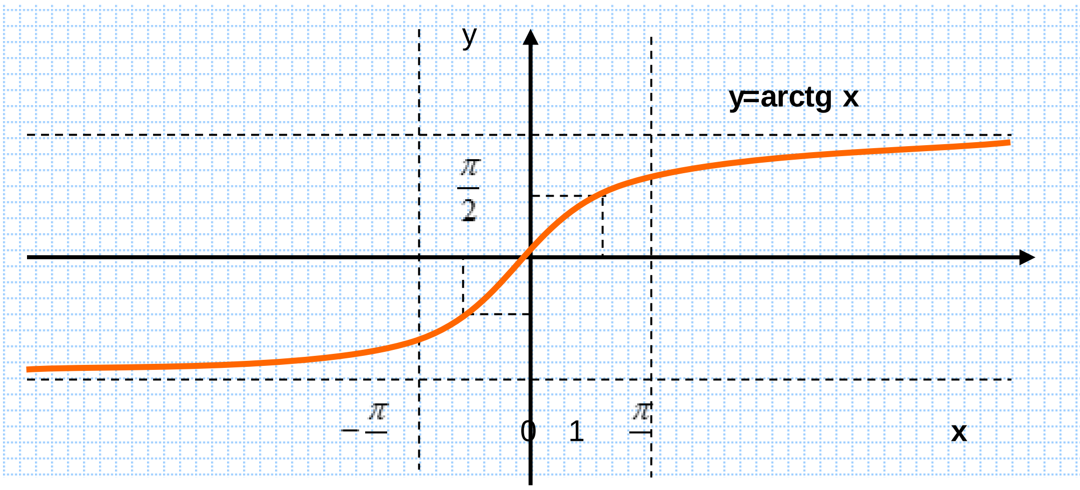



рис.3

Свойства функции y = arctg x

1) область определения - $(-\infty;+\infty)$

2) область значений - $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

3) нечетная, непрерывная

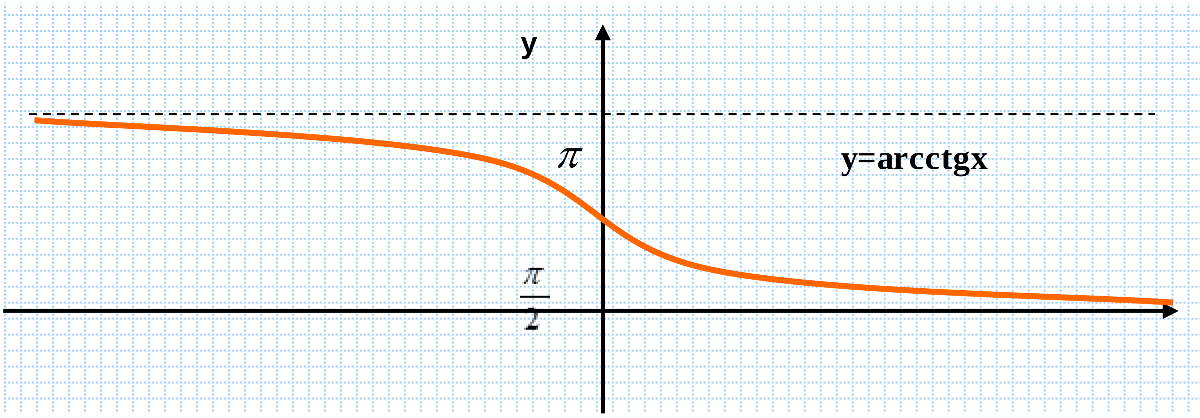
4) возрастающая

**Функция y = arcctgx**

Арккотангенсом числа *a* называется угол из промежутка $(0;\pi)$, котангенс которого равен *a* (обозначается arcctg a).

**Функция y = arcctg x (**рис.4**)**

Функция y = ctg x убывает в промежутке $(0;\pi)$, значит, имеет в этом промежутке обратную функцию, которая называется арккотангенсом и обозначается y = arcctg x.




**Свойства функции y = arcctg x**

1) область определения - $(-\infty;+\infty)$;

2) область значений - $(0;\pi)$;

3) ни четная, ни нечетная, непрерывная;

4) убывающая.

Для нахождения значений обратных тригонометрических функций с отрицательным аргументом удобно пользоваться следующими формулами:

## Практическое занятие №12 «Функции свойства функции

### Вариант №1

1. Найдите область определения функции
   $y = \sqrt{(4 - x^2)\log_{0,5}(x + 5)}$
2. В одной системе координат постройте графики функций:
   $y = \sin x$
   $y = 3 + \sin x$
   $y = 2\sin\frac{x}{2}$
3. Постройте график функции $y = -2ctgx$
   С помощью чертежа исследуйте его по схеме:
   1) Область определения
   2) Область значений
   3) Чётность/нечётность, периодичность
   4) Нули функции
   5) Промежутки знакопостоянства

### Вариант №2

1. Найдите область определения функции
   $y = \sqrt{(x^2 - 1)\log_{\frac{1}{3}}(3 - x)}$
2. В одной системе координат постройте графики функций:
   $y = \cos x$
   $y = -1 + \cos x$
   $y = -\cos(x + \frac{\pi}{6})$
3. Постройте график функции $y = -ctg\frac{x}{4}$
   С помощью чертежа исследуйте его по схеме:
   1) Область определения
   2) Область значений
   3) Чётность/нечётность, периодичность
   4) Нули функции
   5) Нули функции
   6) Промежутки знакопостоянства

### Вариант №3

1. Найдите область определения функции
   $y = \sqrt{x\log_2(x + 4)}$
2. В одной системе координат постройте графики функций:

$y = tgx$

$y = -1 + tgx$

$y = tg2x$

3. Постройте график функции $y = -(\cos x - \frac{\pi}{2})$

   С помощью чертежа исследуйте его по схеме:
   1) Область определения
   2) Область значений
   3) Чётность/нечётность, периодичность
   4) Нули функции
   5) Нули функции
   6) Промежутки знакопостоянства

## Вариант №4

1. Найдите область определения функции

   $y = \sqrt{x^3(1 - \log_4 x)}$
2. В одной системе координат постройте графики функций:

   $y = ctgx$

   $y = -3 + ctg2x$

   $y = ctg(x - \frac{\pi}{3})$
3. Постройте график функции $y = -\sin\frac{x}{4}$

   С помощью чертежа исследуйте его по схеме:
   1) Область определения
   2) Область значений
   3) Чётность/нечётность, периодичность
   4) Нули функции
   5) Промежутки знакапостоянства

## Вариант №5

1. Найдите область определения функции

   $y = \sqrt{(x-2)\log_2(x+4)}$
2. В одной системе координат постройте графики функций:

   $y = \sin x$

   $y = -1 + \sin x$

   $y = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{3}$
3. Постройте график функции $y = -(ctgx + \frac{\pi}{6})$

С помощью чертежа исследуйте его по схеме:
1) Область определения
2) Область значений
3) Чётность/нечётность, периодичность
4) Нули функции
5) Промежутки знакопостоянства

## Вариант №6

1. Найдите область определения функции
   $y=\sqrt{(x-1)^3(1-\log_5 x)}$
2. В одной системе координат постройте графики функций:
   $y=\cos x$
   $y=\cos 2x$
   $y=2\cos(x+\frac{\pi}{4})$
3. Постройте график функции $y=-ctg(x+\frac{\pi}{2})$

   С помощью чертежа исследуйте его по схеме:
   1) Область определения
   2) Область значений
   3) Чётность/нечётность, периодичность
   4) Нули функции
   5) Промежутки знакопостоянства

## Практическое занятие №13 «Решение практических задач, используя свойства функций и их графики

### Вариант №1

**1. Построить график функции** $y=\frac{2}{x^2}+1$**, и исследовать его по свойствам**

1) Область определения
2) Область значения
3) Чётность/нечётность, периодичность
4) Нули функции
5) Точки пересечения с осями
6) Промежутки знакопостоянства

7) Интервалы монотонности

8) Экстремумы функции

9) Наличие асимптот (записать аналитический вид)

10) Интервалы выпуклостей, точки перегиба

**2. Решить уравнения графически**

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 = x^3 + 2$ б) $\log_2 x = x + 1$ с) $\sqrt{x} - 1 = 2^x$

**3. Найдите область определения функции**

$$y = \arcsin\sqrt{3 - x}$$

**Вариант №2**

**1. Построить график функции** $y = \frac{1}{2x^3} - 3$**, и исследовать его по свойствам**

1) Область определения

2) Область значения

3) Чётность/нечётность, периодичность

4) Нули функции

5) Точки пересечения с осями

6) Промежутки знакопостоянства

7) Интервалы монотонности

8) Экстремумы функции

9) Наличие асимптот (записать аналитический вид)

10) Интервалы выпуклостей, точки перегиба

**2. Решить уравнения графически**

$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2 = -\frac{1}{x}$ б) $4\log_2 x = x + 1$ с) $\sqrt{x} - 1 = x^3$

**3. Найдите область определения функции**

$$y = \sqrt{\frac{\pi}{2} - \arccos(x-1)}$$

## Вариант №3

**1. Построить график функции** $y = -\sqrt{x-4} + 2$**, и исследовать его по свойствам**

1) Область определения
2) Область значения
3) Чётность/нечётность, периодичность
4) Нули функции
5) Точки пересечения с осями
6) Промежутки знакопостоянства
7) Интервалы монотонности
8) Экстремумы функции
9) Наличие асимптот (записать аналитический вид)
10) Интервалы выпуклостей, точки перегиба

**2. Решить уравнения графически**

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 = x^3$ б) $2^x = \sqrt{x+1}$ с) $\log_2(x+1) = -x$

**3. Найдите область определения функции**

$$y = \arcsin\frac{(x-1)}{\sqrt{x}}$$

## Вариант №4

**1. Построить график функции** $y = \frac{2}{x^3}$**, и исследовать его по свойствам**

1) Область определения

2) Область значения

3) Чётность/нечётность, периодичность

4) Нули функции

5) Точки пересечения с осями

6) Промежутки знакопостоянства

7) Интервалы монотонности

8) Экстремумы функции

9) Наличие асимптот (записать аналитический вид)

10) Интервалы выпуклостей, точки перегиба

**2. Решить уравнения графически**

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 = x^2 + 1$    б) $x^3 + 1 = \sqrt{x}$    с) $\log_{\frac{1}{4}}(x+1) = -x$

**3. Найдите область определения функции**

$$y = \arccos\frac{2}{x-3}$$

**Вариант №5**

**1. Построить график функции** $y = \frac{8}{x^4} + 1$**, и исследовать его по свойствам**

1) Область определения

2) Область значения

3) Чётность/нечётность, периодичность

4) Нули функции

5) Точки пересечения с осями

6) Промежутки знакопостоянства

7) Интервалы монотонности

8) Экстремумы функции

9) Наличие асимптот (записать аналитический вид)

10) Интервалы выпуклостей, точки перегиба

**2. Решить уравнения графически**

а) $4^x = \log_4 x$ б) $\frac{2}{x} = 2^x$ с) $\sqrt{x+3} - 1 = \frac{1}{x}$

**3. Найдите область определения функции**

$$y = \arccos(x^3 - x)$$

**Вариант №6**

**1. Построить график функции** $y = -\frac{1}{2}x^5 + 2$ **, и исследовать его по свойствам**

1) Область определения

2) Область значения

3) Чётность/нечётность, периодичность

4) Нули функции

5) Точки пересечения с осями

6) Промежутки знакопостоянства

7) Интервалы монотонности

8) Экстремумы функции

9) Наличие асимптот (записать аналитический вид)

10) Интервалы выпуклостей, точки перегиба

**2. Решить уравнения графически**

а) $(3)^x = x^4 + 2$ б) $-x = \sqrt{x+1}$ с) $\log_2(x+1) = x^3$

**3. Найдите область определения функции**

$$y = \arccos\sqrt{\frac{x}{2-x}}$$

## Тема 6 Начала математического анализа

**Цель:** Освоить правила дифференцирования функций, геометрический и физический смысл производной, применение производной для исследования функций.

**Теоретические сведения по выполнению практических занятий:**

При неравномерном движении по прямой материальная точка за равные промежутки времени проходит различные отрезки пути. Для характеристики такого движения пользуются понятием средней скорости.

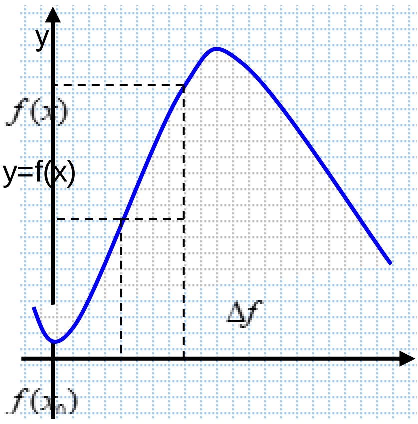
**Средней скоростью** за промежуток времени от $t_0$ до t называется отношение пройденного пути к промежутку времени, за который пройден этот путь.

$$Vcp(t_0;t)=\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$$

Более точную характеристику неравномерного движения дает понятие мгновенной скорости.

**Мгновенной скоростью** за промежуток времени от $t_0$ до t называется предел средней скорости при $t \to t_0$.

**Приращение функции. Производная функции в точке $x_0$**




Разность $x-x_0$ называется

приращением аргумента и обозначается $\Delta x$. $\Delta x = x - x_0$

Разность $y-y_0$ называется

приращением функции и обозначается $\Delta y$ $\Delta y = y - y_0$

или $\Delta f = f(x) - f(x_0)$

**Рис.1**

**Производной** функции f в точке $x_0$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $x \to x_0$.

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Сравнивая формулы производной и мгновенной скорости, можно сделать следующие выводы:

1) производная равна скорости изменения функции;

2) скорость равна производной от пути по времени.

$$\boxed{v = S'(t)}$$

– это равенство называют **механическим** смыслом производной.

Правило вычисления производной с помощью определения

1. Найти приращение функции: $\Delta f = f\ x) - f(x_0)$
2. Найти отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

3. Найти предел этого отношения при $x \to x_0$: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Нахождение производной функции называется **дифференцированием.** Функция, имеющая производную в точке $x_0$, называется дифференцируемой в этой точке. Функция называется дифференцируемой на отрезке [a;b], если она дифференцируема в каждой его точке.

**Правила вычисления производных**

Если функции *u(x) и v(x)* имеют производные во всех точках интервала *(a; b),* то для каждого $x \in (a;b)$ справедливы правила*:*

1. $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$ 2. $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

3. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ 4. $(Cu(x))' = Cu'(x)$

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x}$$

**Дифференциалом** функции в точке $x_0$ называется произведение производной функции в точке $x_0$ на приращение аргумента. Обозначается d.

## Практическое занятие №14 «Производная, физический и геометрический смысл производной»

### Вариант №1

1. Найдите угловой коэффициент касательной проведённой к графику функции $f(x)=4x-5x^2+21$ в точке $x_0=0{,}2$

2. Вычислить производные следующих функций:

a) $y=10xlnx-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+4x$ b) $y=\frac{3^x}{x^4-1}$ c) $y=\frac{\sqrt{x}}{sinx}+x^5tgx-1{,}3$

3. Составить уравнение касательной к графику функции: $y=x^3-4x^2+2x$ в точке $x_0=0{,}2$

4. Машина движется прямолинейно по закону $s(t)=t^2-3t+1$, определить в какой момент времени скорость тела будет равна 4 м/с?

5. Раскройте смысл следующих понятий: производная функции, физический смысл производной.

### Вариант №2

1. Найдите угловой коэффициент касательной проведённой к графику функции $f(x)=2tgx-1$ в точке $x_0=\frac{\pi}{3}$

2. Вычислить производные следующих функций:

$a) y=-3x\cos x$ $y=5xcosx-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-x$ c) $y=\frac{\sqrt[3]{x}}{-5\log_4 x}$

3. Составить уравнение касательной к графику функции: $y=x(x-3)$ в точке $x_0=-0{,}5$

4. Машина движется прямолинейно по закону $s(t)=2t^2+4t+7$, определить в какой момент времени скорость тела будет равна 10 м/с?

5. Раскройте смысл следующих понятий : производная функции, геометрический смысл производной.

### Вариант №3

1. Найдите угловой коэффициент касательной проведённой к графику функции $f(x)=3x+5x^2-10$ в точке $x_0=-0{,}1$

2. Вычислить производные следующих функций:

$a) y = -3x^4 tgx$ $b)\ y = -xctgx - \frac{1}{7x} + 4lnx$ $c)\ y = \frac{(x-1)^2}{-2^x}$

3. Составить уравнение касательной к графику функции: $y = 2x^3 - x^2 - x$ в точке $x_0$= -1

4. Машина движется прямолинейно по закону s(t)=4t²-6t-2, определить в какой момент времени скорость тела будет равна 8 м/с?

5. Перечислите известные вам правила дифференцирования

## Вариант №4

1. Найдите угловой коэффициент касательной проведённой к графику функции $f(x) = 2x - 8x^2 - 1$ в точке $x_0$=-2

2. Вычислить производные следующих функций:

$a) y = 7\ln x * x^{10}$ b) y=-5x⁴ c) $y = \frac{5^x}{ctgx}$

3. Составить уравнение касательной к графику функции: $y = x(x-3)$ в точке $x_0$= -0,5

4. Машина движется прямолинейно по закону s(t)=8t²-t+10, определить в какой момент времени скорость тела будет равна 10 м/с?

5. Что такое дифференцирование? Чему равны производные основных элементарных функций?

## Вариант №5

1. Найдите угловой коэффициент касательной проведённой к графику функции $f(x) = 2\cos x - 1$ в точке $x_0=\frac{\pi}{3}$

2. Вычислить производные следующих функций:

$a) y = -4\sqrt{x}\cos x$ б)$y = 6 - 7^x lnx - \frac{1}{x} + 3x$ c) $y = \frac{5x^{\frac{3}{2}}}{-2\sin x}$

3. Составить уравнение касательной к графику функции: $y = 5x^3 - x^2 - x$ в точке $x_0$=-4

4. Машина движется прямолинейно по закону s(t)=5t²-t-9, определить в какой момент времени скорость тела будет равна 3 м/с

5. Если угловой коэффициент касательной, (проведённой к графику функции y=f(x), в точке $x_o$) >0, <0,=0, какой угол в этом случае образует касательная с положительным направлением оси ОХ?(рисунки всех случаев обязательны)

## Вариант №6

1. Найдите угловой коэффициент касательной проведённой к графику функции $f(x)=\dfrac{tgx-1}{2}$ в точке $x_0=\dfrac{\pi}{6}$

2. Вычислить производные следующих функций:

$a) y=-4x\log_5 x$ $\quad y=4xctgx-\frac{1}{5x}$ $\quad$ c) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{\arcsin x}$

3. Составить уравнение касательной к графику функции: $y=sinx+3$ в точке $x_0=\dfrac{\pi}{4}$

4. Машина движется прямолинейно по закону $s(t)=t^2+2t-3$, определить в какой момент времени скорость тела будет равна 6 м/с?

5. Придумать и решить по одному примеру на каждое из правил дифференцирования.(формулы перед каждым примером обязательны)

## Практическое занятие №15

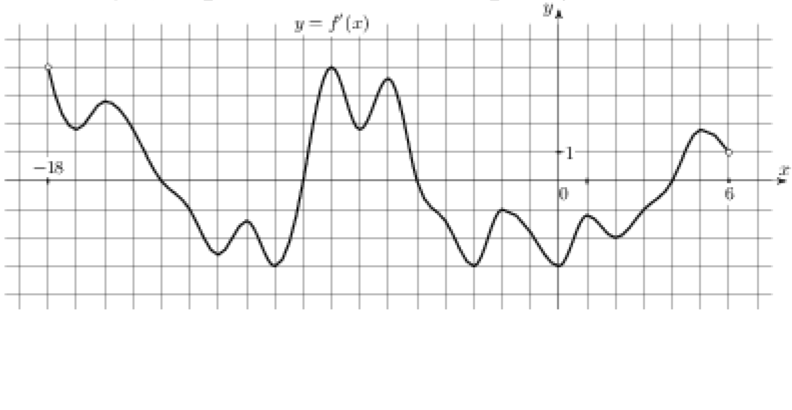
## Тема: «Правила дифференцирования Дифференцирование основных элементарных функций»

## Вариант №1

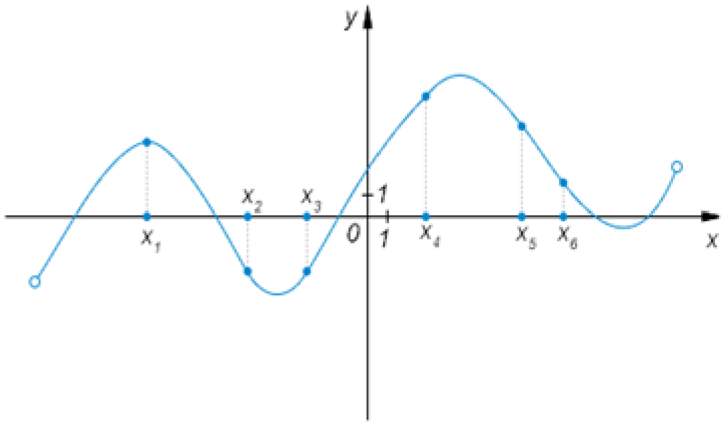
**1.** Найдите производные функции *y=f(x)* в точке *x=1*

**а)** $f(x)=\dfrac{x^2-\ln x-1}{x^2}$ **б)** $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{\log_3 x}$ **в)** $f(x)=4xe^x-4x$

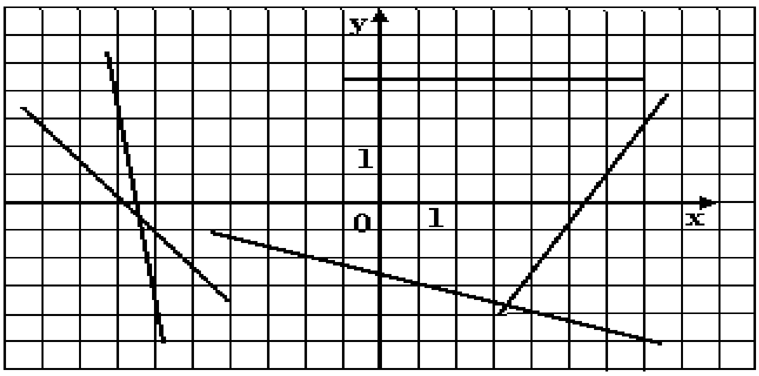
**2.** .На рисунке изображен график $y=f'(x)$ — производной функции $y=f(x)$, определенной на интервале (−18;6). Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку [−13;1].



**3.** На рисунке изображён график функции y=f(x) и отмечены шесть точек на оси абсцисс $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Сколько среди этих точек таких, в которых производная функции отрицательна




**4** На рисунке изображены прямые, являющиеся касательными к графику функции $y = f(x)$ в точках $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$. Определите количество неположительных чисел среди значений производной $f'(x)$ в точках $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$.

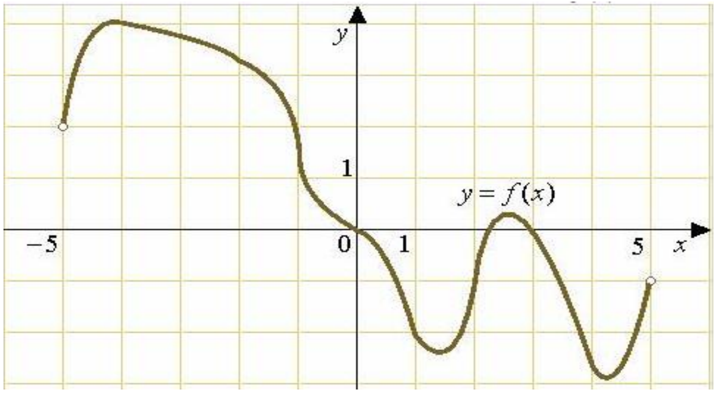



## Вариант №2

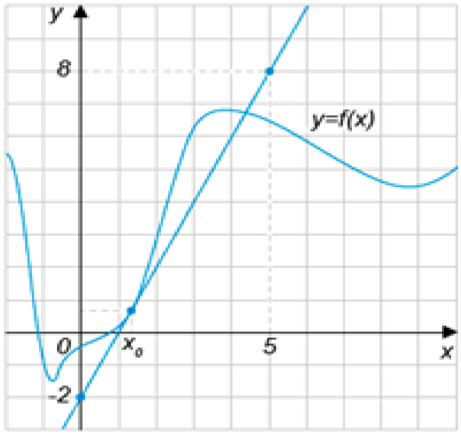
**1.** Найдите производные функции *y=f(x)* в точке *x=3*

**а)** $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{arctgx}$ **б)** $f(x) = (x-3)(x^2+3x+9)$ **в)** $f(x) = \dfrac{8x\sqrt{x}+1}{x}$

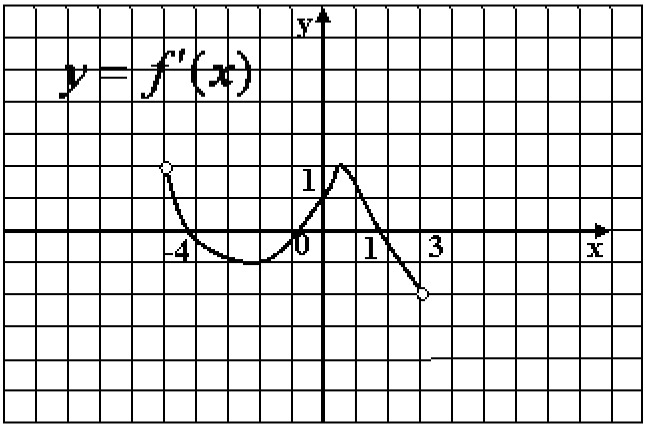
**2.** На рисунке изображен график функции *f*(*x*), определенной на интервале (–5;5). Найдите количество точек, в которых производная функции *f*(*x*) равна 0.



**3.** На рисунке изображены график функции y=f(x) и касательная к этому графику, проведённая в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции y=f(x) в точке $x_0$




**4.** Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4;3)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите число касательных к графику функции $y = f(x)$, которые параллельны оси абсцисс.

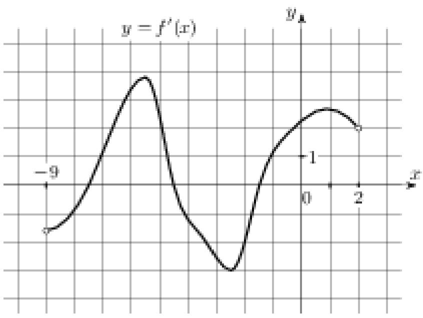



## Вариант №3

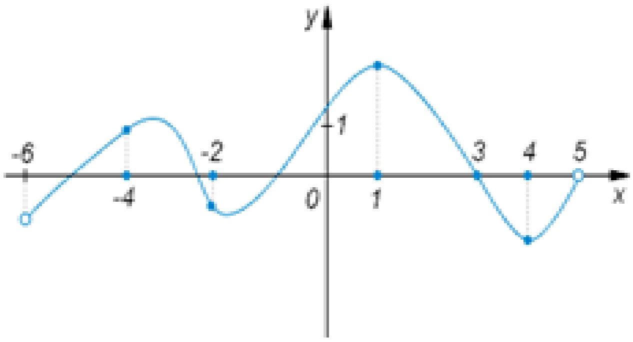
**1.** Найдите производные функции $y=f(x)$ в точке $x=-1$

**а)** $f(x) = \dfrac{(2x-1)^2}{2\cos x}$ **б)** $f(x) = (x-2)(x^2-2x+4)$ **в)** $f(x) = \dfrac{7^x+1}{x}$

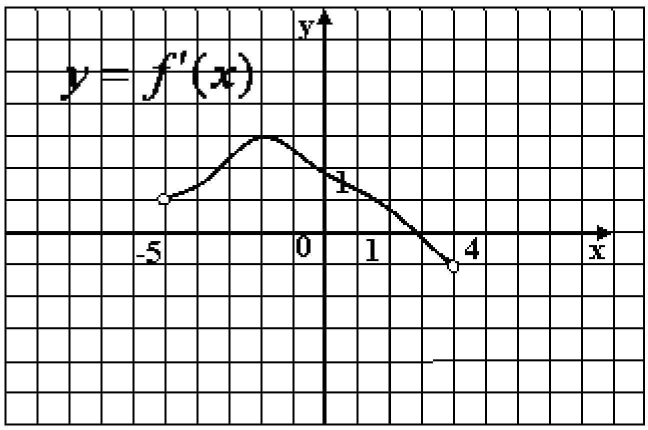
**2.** На рисунке изображен график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9;2)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



**3.** На рисунке изображён график функции, определённой на промежутке (-6;5 ) и отмечены пять точек на оси абсцисс: -4, -2, 1 ,3, 4. В какой из этих точек значение производной наибольшее.




**4.** Функция $y = f(x)$ определена на промежутке (-5;5). На рисунке изображен график ее производной. Найдите число касательных к графику функции $y = f(x)$, которые наклонены под углом в 45° к положительному направлению оси абсцисс.

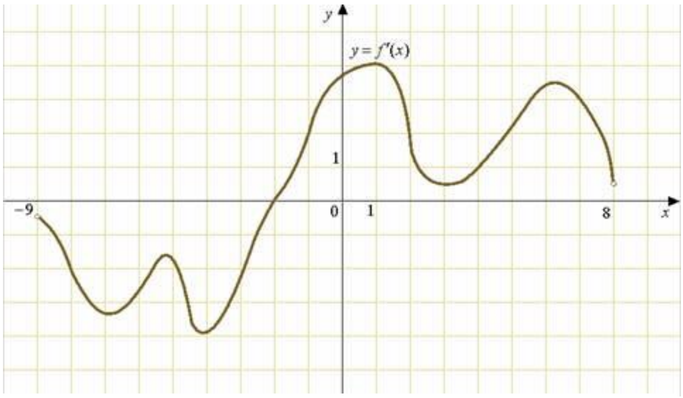


## Вариант №4

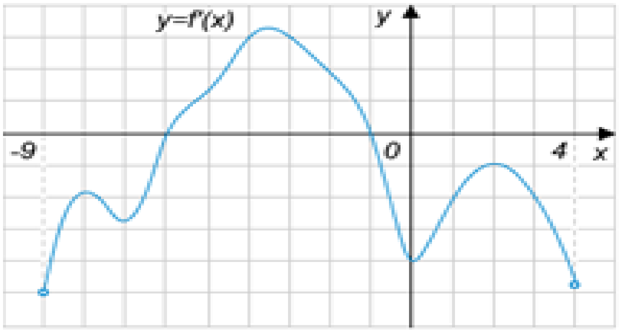
**1.** Найдите производные функции *y=f(x)* в точке *x=1*

**а)** $f(x)=\dfrac{x^2}{4\ln x}$ **б)** $f(x)=(1-x)(-x^2-2x+1)$ **в)** $f(x)=\dfrac{ctgx+2x}{\sqrt{x}}$

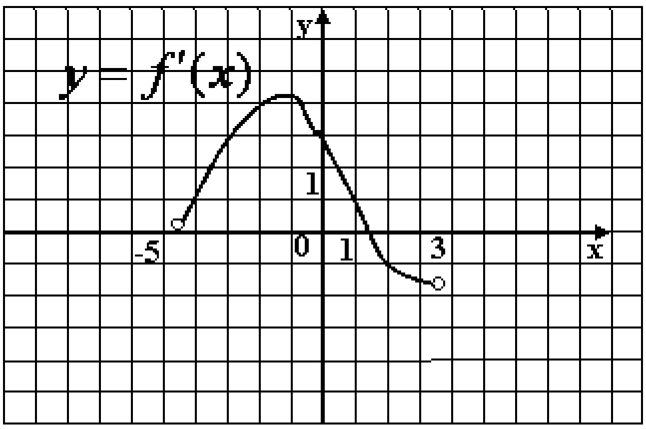
**2.** На рисунке изображен график $y=f`(x)$ производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9;8)$. В какой точке отрезка $[-8;-4]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение.




**3.** На рисунке изображён график производной функции y=f(x),определённой на интервале (-9;4). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции f(x) параллельна прямой y=2x-17




**4.** К графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x_0=-3$ проведена касательная. Определмте угловой коэффициент касательной, если на рисунке изображен график производной данной функции.

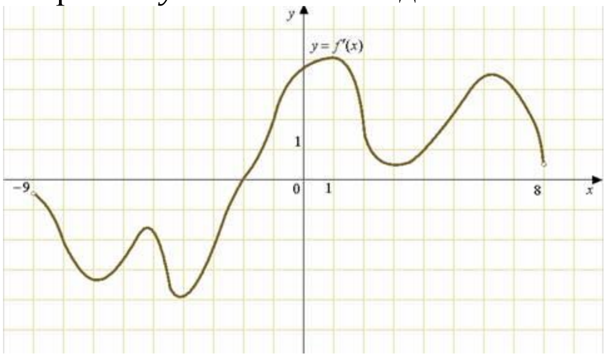


## Вариант №5

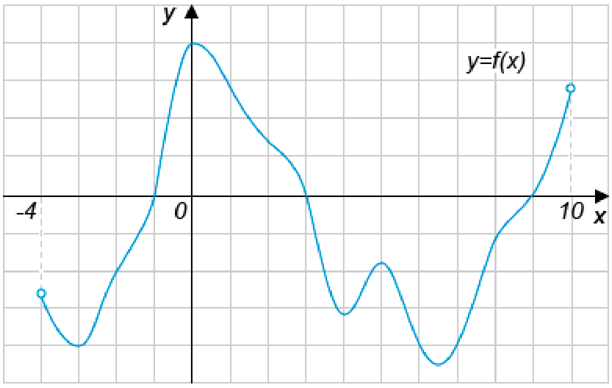
**1.** Найдите производные функции $y=f(x)$ в точке $x=0$

**а)** $f(x)=\dfrac{x^2-\sin x-3}{x^2+3x}$ **б)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{4tgx}$ **в)** $f(x)=\cos xe^x-4x$

**2.** На рисунке изображен график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9;8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=x-7$ или совпадает с ней.

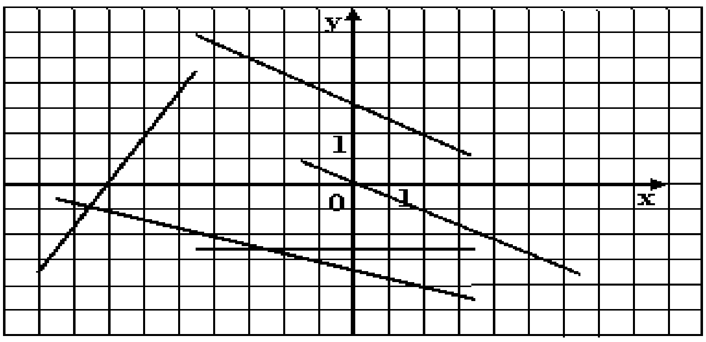



**3.** На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-4;10)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.




**4.**

На рисунке изображены прямые, являющиеся касательными к графику функции $y=f(x)$ в точках $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$. Определите количество положительных чисел среди значений производной $f'(x)$ в точках $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$.

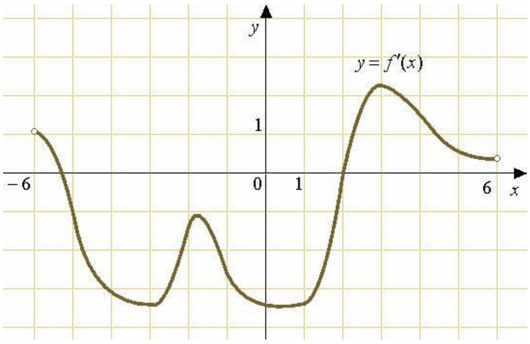


## Вариант №6

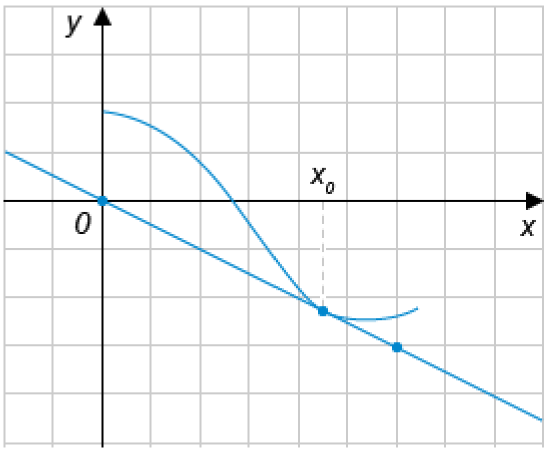
**1.** Найдите производные функции $y=f(x)$ в точке $x_0=4$

**а)** $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x-4}$ **б)** $f(x)=\dfrac{\arccos(x)}{\sqrt{x}}$ **в)** $f(x)=-2x^2e^x-x$

**2.** На рисунке изображен график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6;6)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на интервале $(-4;5)$.

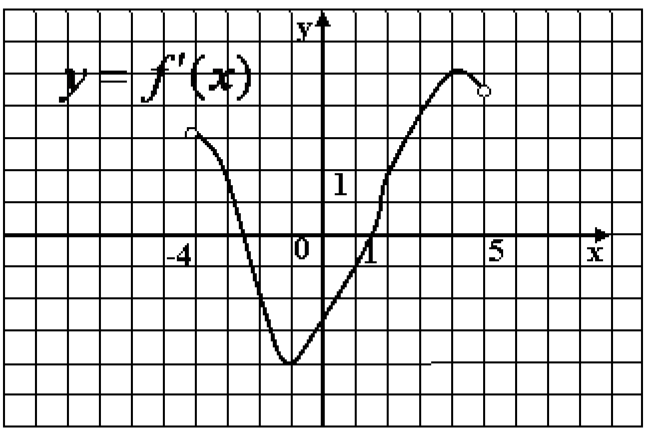



**3.** На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$.




**4.**

Функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(-4;5)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите угол наклона (в градусах) касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $x=1$ к положительному направлению оси абсцисс.



## Практическое занятие №16 «Применение производной для исследования функции на монотонность и экстремумы»

### Вариант №1

1. Исследовать следующие функции на монотонность и экстремум:

   а) $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2+10$

   б) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$

   с) $y=\frac{4}{\sqrt{x^2-2x+4}}$

2. Сформулируйте признаки возрастания и убывания функции

## Практическое занятие №17

### Тема: «Исследование функции на монотонность и экстремум»

### Вариант №2

1. Исследовать следующие функции на монотонность и экстремум:

   а) $y=-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x-5$

   б) $y=\frac{2x}{4-x^2}$

   с) $y=\frac{1}{\sqrt{(1-x)(4+x)}}$

2. Сформулируйте признаки минимума и максимума функции в точке

### Вариант №3

1. Исследовать следующие функции на монотонность и экстремум:

   а) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+12x+1$

   б) $y=\frac{x-1}{x^2-9}$

   с) $y=\frac{-5x}{\sqrt{(3-x)(x+1)}}$

2. Какие точки называются критическими? Привести пример.

### Вариант №4

1. Исследовать следующие функции на монотонность и экстремум:

   а) $y=2x^3+3x^2-12x+7$

б) $y=\frac{5-x}{x^2+2}$

с) $y=\frac{-3}{\sqrt{(7-x)(1+x)}}$

2. Сформулируйте этапы исследования функции на экстремум

## Вариант №5

1. Исследовать следующие функции на монотонность и экстремум:

а) $y=\frac{2}{3}x^3-4x^2+3$

б) $y=\frac{(2x-1)^2}{x}$

с) $y=\frac{x^2}{\sqrt{(2-x)(x+4)}}$

2. Опишите этапы исследования функции на монотонность.

## Вариант №6

1. Исследовать следующие функции на монотонность и экстремум:

а) $y=-2x^3+15x^2+12$

б) $y=\frac{1-x}{x^2-16}$

с) $y=\frac{1}{\sqrt{(3-x)(1-4)}}$

2. Раскройте понятие монотонности функции. Приведите примеры.

## Практическое занятие №17 «Исследование функции, с помощью производной, построение эскиза графика функции»

**1.** Найти интервалы выпуклости и точки перегиба для следующих функций

а) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+7$

б) $f(x)=\frac{3}{x-1}$

с) $f(x)=x^6-4x^4$

**2.** Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=(x+1)^2(x-1)$ *на отрезке* [-2;0]

**3.** Исследовать функцию и построить эскиз её графика:

$$y=\frac{1}{x^2-2x-8}$$

## Вариант №2

**1.** Найти интервалы выпуклости и точки перегиба для следующих функций

а) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$

б) $f(x) = \dfrac{3}{x-1} + x$

с) $f(x) = x^4 - 25x^2$

**2.** Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = \dfrac{x^2+8}{x+1}$ *на отрезке* [0;3]

**3.** Исследовать функцию и построить эскиз её графика:

$$y = -x^2(x+4)^2$$

## Вариант №3

**1.** Найти интервалы выпуклости и точки перегиба для следующих функций

а) $f(x) = (x+1)^2(x+5)^2$

б) $f(x) = \dfrac{-2}{x^2-1}$

с) $f(x) = \dfrac{x^6}{6} - \dfrac{x^4}{4}$

**2.** Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ *на отрезке* [0;2]

**3.** Исследовать функцию и построить эскиз её графика:

$$y = \frac{x+2}{x^2-9}$$

## Вариант №4

**1.** Найти интервалы выпуклости и точки перегиба для следующих функций

а) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$

б) $f(x) = \dfrac{3}{x-1} + x$

с) $f(x) = x^4 - 2x^2$

**2.** Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$ *на отрезке* [1;3]

**3.** Исследовать функцию и построить эскиз её графика:

$$y = x^2(x-2)^2$$

## Вариант №5

**1.** Найти интервалы выпуклости и точки перегиба для следующих функций а) $f(x)=x^4-2x^2-3$

б) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-9}$

с) $f(x)=16x^4-1$

**2.** Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ *на отрезке* [0;2]

**3.** Исследовать функцию и построить эскиз её графика:

$$y=\frac{4x}{1+x^2}$$

## Вариант №6

**1.** Найти интервалы выпуклости и точки перегиба для следующих функций

а) $f(x)=x^2(x-3)^2$

б) $f(x)=-\dfrac{3}{2-x}$

с) $f(x)=x^4+4$

**2.** Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2}$ *на отрезке* [1;4]

**3.** Исследовать функцию и построить эскиз её графика:

$$y=\frac{4}{x^2-1}$$

## Тема 7. Интеграл и его применение

**Цель:** Освоить интегрирование функций, научиться применять понятие и свойства определённого интеграла для вычисления площадей плоских фигур

Теоретические сведения по выполнению практического занятия

**Теоретические сведения по выполнению практического занятия**

$$\boxed{F'(x)=f(x)}$$

Функция F(x) называется **первообразной** для функции f(x) в некотором промежутке, если для любого x из этого промежутка выполняется равенство

**Неопределенным интегралом** от функции f(x) по dx называется множество всех первообразных этой функции. Обозначают $\int f(x)dx$.

Определение. ***Определенным интегралом функции f(x), непрерывной на [a; b], называется приращение ее первообразной на этом промежутке***.

Обозначение: $\int_a^b f(x)dx$, где ***a и b – пределы интегрирования*** (нижний и верхний соответственно).

По определению, $\int_a^b f(x)dx$ = F(b) – F(a) = $F(x)|_a^b$ – **формула Ньютона – Лейбница**.

**Таким образом, отличие определенного интеграла от неопределенного: определенный – число; неопределенный – множество функций.**

Геометрический смысл определенного интеграла: ***если a ≤ b и ∀x∈[a; b] f(x) ≥ 0, то*** $\int_a^b f(x)dx$ ***численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции***.

## Практическое занятие №18 «Вычисление неопределённых интегралов с использованием таблицы и основных свойств»

### Вариант №1

**Задание №1:** ***Найти интегралы, используя таблицу и основные свойства.***

1. $\int\left(4\sqrt{x}+\cos x-\frac{5}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$ 3. $\int\left(4\sqrt{x}+1\right)^2dx$

2. $\int(\frac{5x}{x^2}+4^x-x^{12})dx$ 4. $\int\frac{5x-\sqrt{x}}{4x^2}dx$

**Задание №2:** ***Найти интегралы, используя подходящую подстановку.***

1. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$ 2. $\int\sqrt{4x^3+1}x^2dx$

**Задание №3:** ***Вычислить определённые интегралы:***

**1.** $\int_0^1\frac{5}{3}x^2dx$ **2.** $\int_{-1}^4(x^2-x+2)dx$ **3.** $\int_2^3(x-1)^2dx$ **4.** $\int_0^{\frac{\pi}{6}}2(\sin x-\cos x)dx$

**Задание №4: Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:**

*Y=0,5x² и y=x*

**Задание №5:** Сформулируйте понятие неопределенного интеграла и охарактеризуйте его свойства

## Вариант №2

**Задание №1:** ***Найти интегралы, используя таблицу и основные свойства.***

1. $\int\left(\frac{13}{x}+5\sin x-\frac{1}{x^2}+17\right)dx$ 3. $\int\left(x^5+1\right)^2dx$

2. $\int\frac{x^3+3x+1}{x}dx$ 4. $\int\frac{5x+\sqrt[4]{x}}{6x^4}dx$

**Задание №2:** ***Найти интегралы, используя подходящую подстановку.***

1. $\int x\sqrt{1+2x^2}\,dx$ 2. $\int\sqrt{\frac{1}{5}x^3-1}\,x^2dx$

**Задание №3:** ***Вычислить определённые интегралы, используя основные свойства и формулу Ньютона-Лейбница***

**1.** $\int_0^1\frac{4}{\sqrt{3}}x^{\frac{1}{2}}dx$ **2.** $\int_{-1}^2(2x^2-3x+2)dx$ **3.** $\int_2^3(3x+2)^2dx$ **4.** $\int_0^{\frac{\pi}{3}}3(\sin x-\frac{1}{cos^2x})dx$

**Задание №4: Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:**

*Y=x³ и y=1/x*

**Задание №5:** Сформулируйте понятие определенного интеграла и охарактеризуйте его свойства

## Вариант №3

**Задание №1:** ***Найти интегралы, используя таблицу и основные свойства.***

1. $\int\frac{x^3+4x}{x}dx$ 2. $\int\left(\sqrt{x}-\sqrt{x}\right)^2dx$ 3. $\int(\frac{5x}{x^{-4}}+8^x-5x^{\frac{1}{2}})dx$ 4. $\int\frac{7x-x^6}{4x^{-6}}dx$

**Задание №2:** ***Найти интегралы, используя подходящую подстановку.***

1. $\int x\sqrt{9-x^2}\,dx$ 2. $\int 4x\sqrt[3]{x^2+8}\,dx$

**Задание 3:** ***Вычислить определённые интегралы, используя основные свойства и формулу Ньютона-Лейбница***

**1.** $\int_0^1 7\sqrt{x}dx$ **2.** $\int_{-1}^3(1{,}5x^2+x)dx$ **3.** $\int_{-2}^1(2x-9)^2dx$ **4.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}2(\frac{1}{\sin^2x}-\cos x)dx$

**Задание №4: Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:**

*Y=x+5 и y=-x+10*

**Задание №5:** Сформулируйте геометрический смысл определенного интеграла

## Вариант №4

**Задание №1:** ***Найти интегралы, используя таблицу и основные свойства***

1. $\int\left(\frac{3}{x^5}+e^x-\frac{1}{x^2}+x-8\right)dx$ 2. $\int\left(2x^2+\sqrt{x}\right)^2dx$ 3. $\int\frac{3x^2-6x+8x^3}{x}dx$ 4. $\int\frac{5x+x^3-3}{6}dx$

**Задание №2:** ***Найти интегралы, используя подходящую подстановку***

$\int x\cos(x^2+3)dx$ 2. $\int\frac{5x^2dx}{\left(3x^3+1\right)^3}$

**Задание №3:** ***Вычислить определённые интегралы, используя основные свойства и формулу Ньютона-Лейбница***

**1.** $\int_0^1\frac{6}{\sqrt{x}}dx$ **2.** $\int_{-2}^{2}(x^2+3x+5)dx$ **3.** $\int_1^3(4x-3)^2dx$ **4.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}3(\sin x+5\cos x)dx$

**Задание №4: Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:**

*$Y=x^3$ и $y=8$*

**Задание №5:** Сформулируйте понятие первообразной. Таблица первообразных

## Вариант №5

**Задание №1:** ***Найти интегралы, используя таблицу и основные свойства.***

1. $\int\left(\frac{7}{x}+2\sin x-\frac{5}{x^{\frac{1}{2}}}-x\right)dx$ 2. $\int\left(8x^3-3\right)^2dx$ 3. $\int(\frac{5x}{x^2}+4^x-x^{12})dx$ 4. $\int\frac{5x-\sqrt{x}}{4x^2}dx$

**Задание №2:** ***Найти интегралы, используя подходящую подстановку.***

1. $\int x\sqrt{1-x^2}dx$ 2. $\int x^2\sqrt{6x^3-7}\,dx$

**Задание №3:** ***Вычислить определённые интегралы, используя основные свойства и формулу Ньютона-Лейбница***

**1.** $\int_0^1\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}dx$ **2.** $\int_{-1}^{2}(3x^2-x+5)dx$ **3.** $\int_2^3(4-x)^2dx$ **4.** $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}2(\frac{1}{\sin^2x}+3\cos x)dx$

**Задание №4: Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:**

*$y=\sqrt{x}$ и $y=x^2$*

**Задание №5:** Что такое криволинейная трапеция. Примеры фигур, которые являются криволинейными трапециями и которые не являются.

**Вариант №6**

**Задание №1:** ***Найти интегралы, используя таблицу и основные свойства.***

1. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+3^x-\frac{1}{x^{-2}}+1{,}7x\right)dx$ 2. $\int\left(6\sqrt{x}+x\right)^2dx$ 3. $\int\frac{x^3+3x-9}{x^4}dx$ 4. $\int(x^2+2^x-7x^3)dx$

**Задание №2:** ***Найти интегралы, используя подходящую подстановку.***

1. $\int\frac{5xdx}{2\left(x^2-4\right)}$ 2. $\int(3x-4)^5dx$

**Задание №3:** ***Вычислить определённые интегралы, используя основные свойства и формулу Ньютона-Лейбница***

**1.** $\int_0^1\frac{4}{5}x^{\frac{1}{3}}dx$ **2.** $\int_{-1}^3(5x^2+x+1)dx$ **3.** $\int_2^4(4x+1)^2dx$ **4.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+\frac{2}{cos^2x})dx$

**Задание №4: Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:**

$$y=\frac{1}{2}(x-3)^2+3 \quad и \quad y=(x-3)^2+1$$

**Задание №5: Отличие определённого интеграла от неопределённого. Методы интегрирования**.

**Литература:** Башмаков М.И. Математика. Учебник для 11 кл. (базовый уровень). – М., Academia 2012.
Башмаков М.И. Математика: 10 кл. Сборник задач: учеб.пособие. – М.:Academia, 2008.
Богомолов Н.В. «Практические занятия по математике», – М.:Вентана-Граф,2010

## Тема 8 «Элементы комбинаторики»

## Практическое занятие №19 «Решение комбинаторных задач»

**Цель:** Сформировать умение решать задачи, используя основные понятия комбинаторики

**Теоретические сведения по выполнению практического занятия**

**Размещениями** из n элементов по m элементов (m<=n) называются соединения, каждое из которых содержит m элементов, взятых из данных n элементов, и которые отличаются одно от другого либо самими элементами, либо порядком их расположения.

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$$

$$A_n^n=P_n=n!$$

**Сочетаниями** из n элементов по m элементов (m<=n) называются соединения, каждое из которых содержит m элементов, взятых из данных n разных элементов, и которые отличаются одно от другого по крайней мере одним элементом.

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\cdot m!}$$

Свойства сочетаний:

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$

2. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$

Факториал числа n – это произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно.

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 1\cdot 2 = 2$

$3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6 \quad 3! = 2!\cdot 3 = 6$

$4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24 \quad 4! = 3!\cdot 4 = 24$

$5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120 \quad 5! = 4!\cdot 5 = 120$

**Перестановками** из n элементов называются соединения, которые состоят из одних и тех же n элементов и отличаются одно от другого только порядком их расположения. $P_n = n!$

**Вариант №1**

1. Сколькими способами из 9 учебных предметов можно составить расписание учебного дня из 6 различных уроков
2. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы в слове «конверт»
3. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 8
4. Решите уравнение:

   а) $14C_n^{n-2} = 15A_{n-3}^2$ б) $\dfrac{(n+2)!(n^2-9)}{(n+4)!}$

5. Что такое размещения? Формула размещений. Пример.

**Вариант №2**

1. Сколькими способами из 10 игроков волейбольной команды можно выбрать стартовую шестёрку?

2. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы в слове «компьютер»
3. Сколько различных правильных дробей можно составить, используя в числителе и знаменателе числа: 2, 5, 7, 9, 13
4. Решите уравнение(а) и упростите выражение (б):

   а) $6C_n^{n-3} = 11A_{n-1}^2$  б) $\dfrac{(m+1)!(m+3)}{(m+4)!}$
5. Что такое сочетания? Формула размещений. Пример

**Вариант №3**

1. На плоскости даны 8 точек, причём никакие три из них не лежат на одной прямой: сколько существует лучей с началом в любой из данных точек, проходящих через любую другую из данных точек?
2. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы в слове «буква»
3. Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 8
4. Решите уравнение(а) и упростите выражение (б):

   а) $21C_{2n}^{n+1} = 11C_{2n+1}^{n-1}$  б) $\dfrac{(2k+1)!}{(2k-1)!}$
5. Что такое бином Ньютона? Формула. Пример разложения двучлена в 6 степени.

**Вариант №4**

1. На плоскости даны 8 точек, причём никакие три из них не лежат на одной прямой: сколько существует векторов с началом и концом в любых двух из данных точек?
2. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы в слове «батон»
3. Сколько различных неправильных дробей можно составить, используя в числителе и знаменателе числа: 2, 3, 7, 9, 13
4. Решите уравнение(а) и упростите выражение (б):

   а) $13C_{2n}^{n+1} = 7C_{2n+1}^{n-1}$  б) $\dfrac{(4m-1)!}{(4m-3)!} \cdot \dfrac{3!}{(1-m)4!}$
5. Что такое биномиальные коэффициенты? Свойства биномиальных коэффициентов

**Вариант №5**

1. На плоскости даны 8 точек, причём никакие три из них не лежат на одной прямой: сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?
2. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы в слове «экзамен»

3. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 8
4. Решите уравнение(а) и упростите выражение (б):

а) $A_x^5 = 336C_{x-2}^{x-5}$ б) $\frac{25m^5 - m^3}{(5m+1)!} \cdot (\frac{1}{5(5m-2)!})^{-1}$

5. Что такое перестановки? Формула пример.

**Вариант №6**

1. На плоскости даны 8 точек, причём никакие три из них не лежат на одной прямой: сколько существует отрезков с концами в этих точках?
2. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы в слове «концерт»
3. Сколько различных неправильных дробей можно составить, используя в числителе и знаменателе числа: 2, 3, 7, 9, 13
4. Решите уравнение(а) и упростите выражение (б):

а) $12C_{x+3}^{x-1} = 55A_{x+1}^2$ б) $\frac{(3k+3)!k!}{3k!} : \frac{(k+3)!(3k+1)}{3!(k^2+5k+6)}$

5. Что такое треугольник Паскаля, для чего он используется. Пример.

**Литература:** Студенецкая В. Н. «Решение задач по статистике, комбинаторике и теории вероятностей» --Волгоград, Учитель 2009

**Практическое занятие №20** «Вероятность события. Решение статистических задач»

## Тема 9 «Элементы теории вероятностей и математической статистики»

## Практическое занятие №20 «Элементы теории вероятностей и математической статистики»

**Цель:** сформировать определение понятия событие, научиться выполнять действия над событиями, сформировать понятие классического определения вероятности события, суммы и произведения вероятностей сформировать умение применять формулу бинома Ньютона, сформировать понятие случайной величины, полигона частот, гистограммы частот

### Теоретические сведения к выполнению практического занятия

В теории многочленов двучлены часто называют биномами.

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1\cdot a + 1\cdot b$$
$$(a+b)^2 = 1\cdot a^2 + 2ab + 1\cdot b^2$$
$$(a+b)^3 = 1\cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1\cdot b^3$$
$$(a+b)^4 = 1\cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1\cdot b^4$$
$$(a+b)^5 = 1\cdot a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1\cdot b^5$$
$$(a+b)^m = C_m^0 \cdot a^m + C_m^1 a^{m-1}b + C_m^2 a^{m-2}b^2 + \ldots + C_m^n a^{m-n}b^n + \ldots + C_m^{m-1} ab^{m-1} + C_m^m \cdot b^m \qquad (*)$$

Формулу (*) называют **биномом Ньютона**, а числа $C_n^m$ биномиальными коэффициентами. Биномиальные коэффициенты легко находят с помощью треугольника Паскаля. Треугольник Паскаля – это таблица значений $C_n^m$, составленная на основании рекуррентного свойства числа сочетаний $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$ с учетом того, что $C_n^0 = C_n^m = 1$

Свойство элементов строки треугольника Паскаля:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

Событие называется **случайным** по отношению к некоторому испытанию (опыту), если в ходе этого испытания оно может наступить, а может и не наступить. Примером такого события может служить выпадение герба при бросании монеты.

Событие называется **достоверным** по отношению к некоторому испытанию, если в ходе этого испытания событие обязательно произойдет. Например, достоверным событием будет появление одного из шести чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 при одном бросании игрального кубика.

Событие называется **невозможным**, если при проведении некоторого испытания оно никогда не наступит. Примером такого события может служить выпадение числа 7 при бросании игрального кубика.

**Суммой событий А и В** называется событие, которое состоит в том, что происходит хотя бы одно из данных событий. Сумму событий А и В обозначают А+В.

**Произведением событий А и В** называют событие, которое состоит в том, что происходят оба этих события. Произведение событий А и В обозначают АВ.

События А и В называют равными (равносильными), и обозначают А=В, если событие А происходит тогда и только тогда, когда происходит событие В.

Событие $\overline{\text{A}}$ называют противоположным событию А, если событие $\overline{\text{A}}$происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие А.

Вероятностью P(A) события А в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов m, благоприятствующих событию А, к числуn всех исходов испытания.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример: В партии из 30 миксеров 2 бракованных. Найти вероятность купить исправный миксер.

$$n = 30, m = 30 - 2 = 28$$

$$P = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

Аксиомы вероятностей:

1) Каждому событию А поставлено в соответствие неотрицательное число P(A), называемое вероятностью события А.
2) Если события $A_1$, $A_2$ … попарно несовместны, то $P(A_1+A_2+\ldots)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots$

Свойства вероятностей:

1) Вероятность невозможного события равна нулю P=0.
2) Вероятность достоверного события равна единице P=1.
3) Вероятность произвольного случайного события А заключается между 0 и 1: $0<P(A)<1$.

События А и В называются совместными, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

События А и В называются независимыми, если вероятность наступления одного события не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей слагаемых без вероятности произведения: P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых: P(A+B)=P(A)+P(B).

$P(A)+P(\overline{A})=1$

Вероятность произведения событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: P(AB)=P(A)·P(A/B) или P(BA)=P(A)·P(B/A)

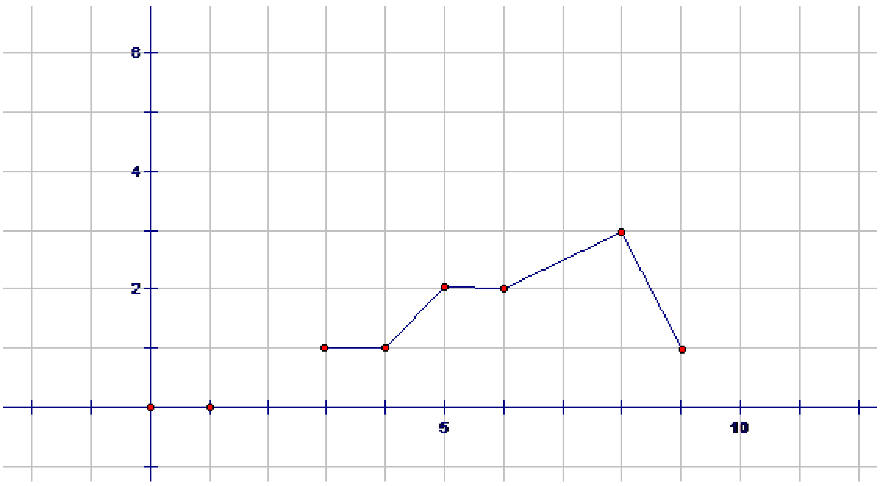
Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей сомножителей: P(AB)=P(A)·P(B).

Случайными величинами называют такие величины, которые в ходе наблюдений или испытаний могут принимать различные значения. На практике после проведения реальных испытаний составляются таблицы распределения значений случайных величин по частотам (или по относительным частотам), после чего для большей наглядности распределение данных представляют либо в виде диаграммы, либо в виде полигона частот (полигона относительных частот). Заполнив по данным относительных частот таблицу, можно построить ступенчатую фигуру, которая называется гистограммой относительных частот.

Пример: Даны результаты 10 измерений диаметра круга d: 8, 3, 5, 6, 9, 8, 4, 5, 6, 8. Представить эти данные с помощью таблиц распределения по частотам M и относительным частотам W; а также с помощью полигона частот.

| **d** | **3** | **4** | **5** | **6** | **8** | **9** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **M** | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 |
| **W=M/N** | 1/10 | 1/10 | 2/10 | 2/10 | 3/10 | 1/10 |

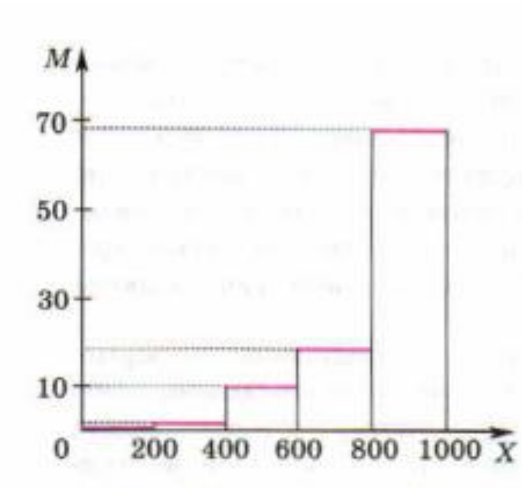
$$\sum M = N = 10$$
$$\sum W = 1$$

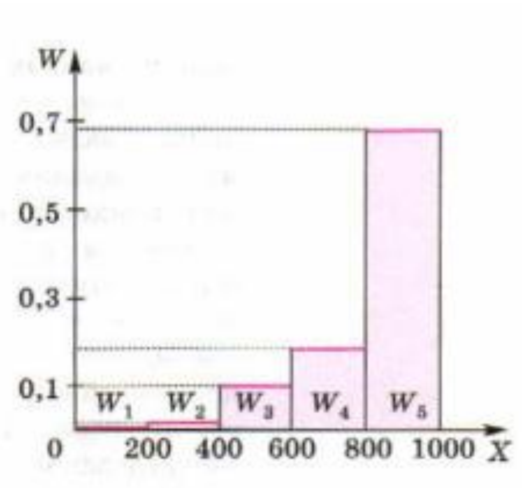



N=100

| T | [0;200) | [200;400) | [400;600) | [600;800) | [800;1000] |
|---|---|---|---|---|---|
| M | 1 | 3 | 10 | 18 | 68 |

| X | [0;200) | [200;400) | [400;600) | [600;800) | [800;1000] |
|---|---|---|---|---|---|
| W | 0,01 | 0,03 | 0,1 | 0,18 | 0,68 |




## Вариант №1

**Задача №1** Бросают одновременно две игральные кости. Какова вероятность, что сумма очков будет равна 4; сумма очков будет меньше 11, выпадут одновременно оба нечётных очка.

**Задача №2** 5. В ящике находится 45 шариков, из которых 17 белых. Потеряли 2 не белых шарика. Какова вероятность того, что выбранный наугад шарик будет белым?

1) $\frac{17}{45}$ 2) $\frac{17}{43}$ 3) $\frac{43}{45}$ 4) $\frac{17}{45}$

**Задача №3** Бросают три монеты. Какова вероятность того, что выпадут два орла и одна решка?

1) $\frac{3}{2}$ 2) 0,5 3) 0,125 4) $\frac{1}{3}$

**Задача №4** . В денежно-вещевой лотерее на 1000000 билетов разыгрывается 1200 вещевых и 800 денежных выигрышей. Какова вероятность выигрыша?

1) 0,02 2) 0,00012 3) 0,0008 4) 0,002

**Задача №5** Результаты контрольной работы по математике представлены в таблице. Вычислите среднюю отметку за контрольную работу.

| **Варианта (отметки)** | **«2»** | **«3»** | **«4»** | **«5»** | **Всего вариант** | **4** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Частота варианты** | **3** | **18** | **5** | **2** | **Сумма** | **28** |

**Задача №6** У учеников некоторого класса замеряли вес, результаты получились следующие:

45, 50, 51, 50, 47, 51
54, 55, 50, 49, 48, 53
47, 44, 43, 45, 52, 50

Определите 1)размах варианты, 2)моду
3) среднее арифметическое
4) постройте полигон частот

## Вариант №2

**Задача №1** Бросают одновременно две игральные кости. Какова вероятность, что сумма очков будет меньше 5; произведение очков будет больше 23, выпадут одновременно оба очка с числами, которые являются простыми.

**Задача №2** В игральной колоде 36 карт. Наугад выбирается одна карта. Какова вероятность, что эта карта – туз?

1) $\frac{1}{36}$ 2) $\frac{1}{35}$ 3) $\frac{1}{9}$ 4) $\frac{36}{4}$

**Задача №3** Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что выпадут две четные цифры?

1) 0,25 2) $\frac{2}{6}$ 3) 0,5 4) 0,125

**Задача №4** В корзине лежат грибы, среди которых 10% белых и 40% рыжих. Какова вероятность того, что выбранный гриб белый или рыжий?

1) 0,5 2) 0,4 3) 0,04 4) 0,8

**Задача №5** Результаты контрольной работы по математике представлены в таблице. Вычислите среднюю отметку за контрольную работу**.**

| Варианта (отметки) | «2» | «3» | «4» | «5» | Всего вариант | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Частота варианты | 1 | 10 | 7 | 6 | Сумма | 24 |

Задача №6 У учеников некоторого класса замеряли рост, результаты получились следующие:

145, 150, 151, 150, 147, 151 Определите 1)размах варианты, 2)моду, медиану

154, 155, 150, 149, 148, 153 3) среднее арифметическое

147, 144, 143, 145, 152, 150 4) постройте полигон частот

## Вариант №3

**Задача №1** Бросают одновременно две игральные кости. Какова вероятность, что сумма очков будет простым числом; сумма очков будет меньше 30, выпадут одновременно оба чётных очка.
**Задача №2** 5. Какова вероятность, что при одном броске игрального кубика выпадает число очков, равное четному числу?

1) $\frac{1}{6}$ 2) 0,5 3) $\frac{1}{3}$ 4) 0,25

**Задача №3** Катя и Аня пишут диктант. Вероятность того, что Катя допустит ошибку, составляет 60%, а вероятность ошибки у Ани составляет 40%. Найти вероятность того, что обе девочки напишут диктант без ошибок.

1) 0,25 2) 0, 4 3) 0,48 4) 0,2

**Задача №4** Завод выпускает 15% продукции высшего сорта, 25% - первого сорта, 40% - второго сорта, а все остальное – брак. Найти вероятность того, что выбранное изделие не будет бракованным.

1) 0,8 2) 0,1 3) 0,015 4) 0,35

**Задача №5** Результаты контрольной работы по математике представлены в таблице. Вычислите среднюю отметку за контрольную работу.

| Варианта (отметки) | «2» | «3» | «4» | «5» | Всего вариант | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Частота варианты | 6 | 9 | 3 | 9 | Сумма | 27 |

**Задача №6** Ученики некоторого класса, тратят на поход в школу следующее количество времени:

40, 20, 21, 10, 40, 60 Определите 1)размах варианты, 2)моду
24, 15, 50, 20, 46, 50 3) среднее арифметическое
15, 44, 43, 35, 25, 5 4) постройте полигон частот

## Вариант №4

**Задача №1** Бросают одновременно две игральные кости. Какова вероятность, что модуль разности очков будет равен 6; частое очков будет равно 1, выпадут одновременно оба очка с числами, среди которых одно является чётным, а другое кратно 3.

**Задача №2** Какова вероятность, что ребенок родится 7 числа?

1) $\frac{7}{30}$ 2) $\frac{7}{12}$ 3) $\frac{7}{31}$ 4) $\frac{7}{365}$

**Задача №3** Каждый из трех стрелков стреляет в мишень по одному разу, причем попадания первого стрелка составляет 90%, второго – 80%, третьего – 70%. Найдите вероятность того, что все три стрелка попадут в мишень?

1) 0,504 2) 0,006 3) 0,5 4) 0,3

**Задача №4** Из 30 учеников спорткласса, 11 занимается футболом, 6 – волейболом, 8 – бегом, а остальные прыжками в длину. Какова вероятность того, что один произвольно выбранный ученик класса занимается игровым видом спорта?

1) $\frac{17}{30}$ 2) 0,5 3) $\frac{28}{30}$ 4) $\frac{14}{30}$

**Задача №5** Результаты контрольной работы по математике представлены в таблице. Вычислите среднюю отметку за контрольную работу.

| Варианта (отметки) | «2» | «3» | «4» | «5» | Всего вариант | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Частота варианты | 3 | 5 | 4 | 3 | Сумма | 15 |

**Задача №6** У учеников некоторого класса замеряли скорость чтения слов в минуту, результаты получились следующие:

140, 132, 151, 150, 147, 151
154, 135, 141, 169, 168, 155
134, 124, 143, 145, 152, 155

Определите 1)размах варианты, 2)моду, медиану
3) среднее арифметическое
4) постройте полигон частот

## Вариант №5

**Задача №1** Бросают одновременно две игральные кости. Какова вероятность, что сумма очков будет равна 4; сумма очков будет меньше 11, выпадут одновременно оба нечётных очка.

**Задача №2** Какова вероятность того, что выбранное двузначное число делится на 12?

1) $\frac{12}{90}$ 2) $\frac{4}{45}$ 3) $\frac{12}{45}$ 4) $\frac{90}{8}$

**Задача №3** Николай и Леонид выполняют контрольную работу. Вероятность ошибки при вычислениях у Николая составляет 70%, а у Леонида – 30%. Найдите вероятность того, что Леонид допустит ошибку, а Николай нет.

1) 0,21 2) 0,49 3) 0,5 4) 0,09

**Задача №4** Музыкальная школа проводит набор учащихся. Вероятность быть не зачисленным во время проверки музыкального слуха составляет 40%, а чувство ритма – 10%. Какова вероятность положительного тестирования?

1) 0,5 2) 0,4 3) 0,6 4) 0,04

**Задача №5** Результаты контрольной работы по математике представлены в таблице. Вычислите среднюю отметку за контрольную работу.

| Варианта (отметки) | «2» | «3» | «4» | «5» | Всего вариант | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Частота варианты | 3 | 18 | 5 | 2 | Сумма | 28 |

**Задача №6** У учеников некоторого класса замеряли вес, результаты получились следующие:

45, 50, 51, 50, 47, 51 Определите 1)размах варианты, 2)моду
54, 55, 50, 49, 48, 53 3) среднее арифметическое
47, 44, 43, 45, 52, 50 4) постройте полигон частот

## Вариант №6

**Задача №1** Бросают одновременно две игральные кости. Какова вероятность, что сумма очков будет меньше 5; произведение очков будет больше 23, выпадут одновременно оба очка с числами, которые являются простыми.

**Задача №2** В ящике лежат карточки с буквами, из которых можно составить слово «электрификация». Какова вероятность того, что наугад выбранная буква окажется буквой к?

1) $\frac{1}{7}$ 2) 7 3) $\frac{1}{14}$ 4) $\frac{2}{33}$

**Задача №3** Каждый из трех стрелков стреляет в мишень по одному разу, причем вероятность попадания 1 стрелка составляет 80%, второго – 70%, третьего – 60%. Найдите вероятность того, что двое из трех стрелков попадет в мишень.

1) 0,336 2) 0,452 3) 0,224 4) 0,144

**Задача №4** В корзине лежат фрукты, среди которых 30% бананов и 60% яблок. Какова вероятность того, что выбранный наугад фрукт будет бананом или яблоком?

1) 0,9 2) 0,5 3) 0,34 4) 0,18

**Задача №5** Результаты контрольной работы по математике представлены в таблице. Вычислите среднюю отметку за контрольную работу.

| **Варианта (отметки)** | **«2»** | **«3»** | **«4»** | **«5»** | **Всего вариант** | **4** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Частота варианты** | **1** | **10** | **7** | **6** | **Сумма** | **24** |

**Задача №6** У учеников некоторого класса замеряли рост, результаты получились следующие:

**145, 150, 151, 150, 147, 151** **Определите 1)размах варианты, 2)моду, медиану**

154, 155, 150, 149, 148, 153 **3) среднее арифметическое**

147, 144, 143, 145, 152, 150 **4) постройте полигон частот**

## Тема 10 «Координаты и векторы»

**Тема:** Уметь выполнять основные действия над векторами на плоскости и в пространстве.

### Практическое занятие №21

### Тема: «Построение точек, отрезков в пространстве. Модуль вектора. Расстояние между точками в пространстве»

### Практическое занятие №22

### Тема: «Действия над векторами»

### Теоретические сведения по выполнению практических занятий:

**Вектором** называют направленный отрезок. **Длиной вектора** называется, длина отрезка, изображающего вектор. Два вектора называются **равными**, если равны их длины и одинаковы направления. **Нулевым вектором** называется вектором, у которого начало совпадает с концом. **Единичным вектором** называется вектор, длина которого равна единице. Углом между ненулевыми векторами называется угол между равными им векторами, отложенными от одной точки. Два вектора называются **коллинеарными,** если угол между ними $0^0$ или $180^0$ .

Два вектора называются **перпендикулярными,** если угол между ними равен $90^0$ .

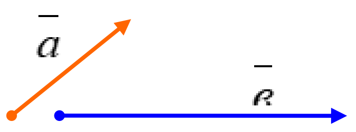
Два вектора называются **противоположными,** если их длины равны, а направления противоположны.

**Действия над векторами, заданными направленными отрезками**

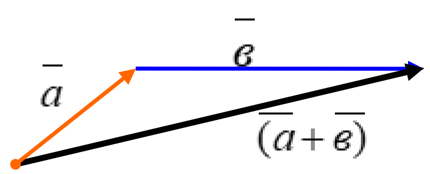
**I. Сложение векторов**

1. Правило треугольника

Дано:

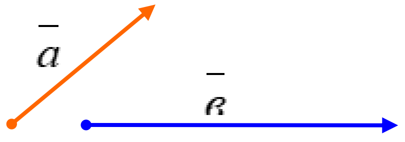



Построение;

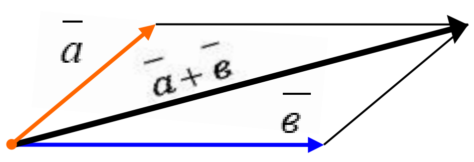



2. Правило параллелограмма

Дано:

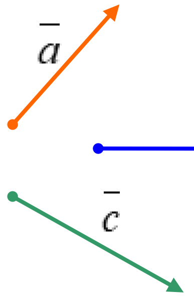



Построение:

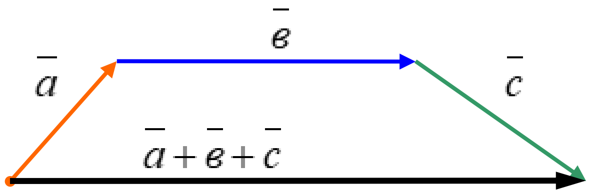


3. Правило многоугольника

Дано:




Построение:

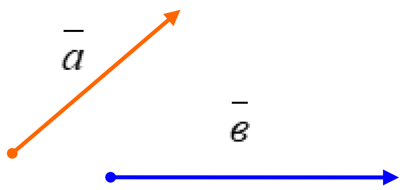



**Свойства сложения**

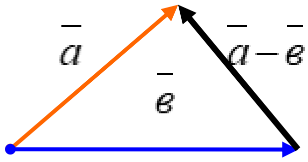
1. $\overline{a}+\overline{в}=\overline{в}+\overline{a}$ - переместительное свойство.
2. $(\overline{a}+\overline{в})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{в}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{c})+\overline{в}$ - сочетательное свойство.

**II. Вычитание векторов**

Дано:




Построение:




**III. Умножение вектора на число**

Произведением вектора, $\overline{a}$ на число $\lambda$ называется вектор, $\lambda\overline{a}$ у которого:

1) длина равна длине вектора $\overline{a}$, умноженной на модуль числа $|\lambda|$;

2) направление совпадает с вектором $\overline{a}$, если число $\lambda$ положительное, и противоположно вектору $\overline{a}$, если $\lambda$ отрицательно.

1. $|\lambda\overline{a}|=|\overline{a}|*|\lambda|$
2. $\lambda\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{a}$ , если $\lambda>0$

   $\lambda\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{a}$ , если $\lambda<0$

**Векторы, заданные координатами**

**1.** Чтобы найти **координаты вектора**, надо из координат его конца вычесть координаты начала:

$$a_1 = x_2 - x_1$$

$$a_2 = y_2 - y_1$$

$$a_3 = z_2 - z_1$$

**2. Длина вектора** вычисляется по формуле

$|\overline{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ или $|\overline{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

**3. При сложении векторов** их соответствующие координаты складываются, при вычитании – вычитаются, при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

**4.** Если **векторы равны**, то их координаты равны, и обратно, если координаты векторов равны, то векторы равны.

$$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

**5.** Если **векторы коллинеарны,** то их координаты пропорциональны, и обратно, если координаты векторов пропорциональны, то векторы коллинеарны.

$$\bar{a} \text{ колл. } \bar{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

**6)** Если **векторы перпендикулярны,** то их скалярное произведение равно нулю, и, обратно, если скалярное произведение векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$$

**Скалярное произведение векторов**

**Скалярным произведением** векторов $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\bar{b}(b_1, b_2, b_3)$ называется число $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

**Теорема.** Скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi$$

**Следствия из теоремы о скалярном произведении**

1) Косинус угла между векторами вычисляется по формуле:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}}$$

2) Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины:

$$\boxed{\overline{a^2} = |a|^2}$$

3) Скалярное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда векторы перпендикулярны:

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}}$$

4) Скалярное произведение векторов равно произведению длины одного из них на проекцию другого: $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot \left(\text{пр}_{\bar{a}} \bar{b}\right)$; $\bar{a} \cdot \bar{b} = |b| \cdot \left(\text{пр}_{\bar{b}} \bar{a}\right)$.

**Координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении**

Координаты середины отрезка

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \\ z = \dfrac{z_1 + z_2}{2} \end{cases}$$

Координаты точки, делящей отрезок в отношении $\lambda$.

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \\ z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \end{cases}$$

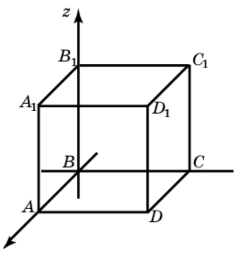
**Практическое занятие №21** «Построение точек, отрезков в пространстве. Вычисление расстояния между точками в пространстве»

## Практическое занятие №21

## Тема: «Построение точек, отрезков в пространстве. Модуль вектора. Расстояние между точками в пространстве»

### Вариант №1

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 8. Начало координат находится в точке $B$.




а)Назовите координаты вершин куба B, D, $A_1$.

б) Найдите длину диагонали $AC_1$

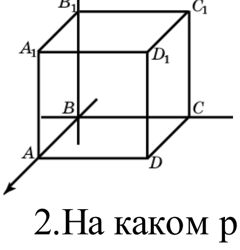
с)Найдите длину прямой соединяющей середины отрезков AB и $D_1C_1$

2.На каком расстоянии находится точка C(4;6;-3), от координатной плоскости:

а) *Oxy*; б) *Oxz*; в) *Oyz*?

### Вариант №2

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 2. Начало координат находится в точке $B$.




а)Назовите координаты вершин куба $B_1$, D, $C_1$.

б) Найдите длину диагонали $B_1D$

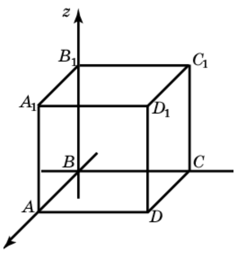
с)Найдите длину прямой соединяющей середины отрезков $A_1D_1$ и BC

2.На каком расстоянии находится точка C(-1;5;4), от координатной плоскости:

а) *Oxy*; б) *Oxz*; в) *Oyz*?

## Вариант №3

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 3. Начало координат находится в точке $B$.



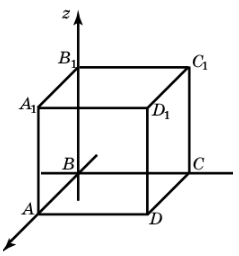

а)Назовите координаты вершин куба $A_1$, $D$, $C_1$.
б) Найдите длину диагонали $B_1D$
с)Найдите длину прямой соединяющей середины отрезков $A_1B_1$ и $DC$

2.На каком расстоянии находится точка $C(2;-5;-3)$, от координатной плоскости:

а) $Oxy$; б) $Oxz$; в) $Oyz$?

## Вариант №4

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 6. Начало координат находится в точке $B$.



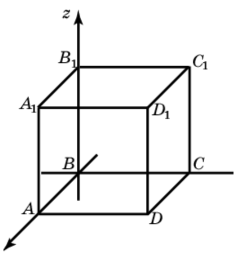

а)Назовите координаты вершин куба $A_1$, $D$, $C_1$.
б) Найдите длину диагонали $BD_1$
с)Найдите длину прямой соединяющей середины отрезков $AB$ и $D_1C_1$

2.На каком расстоянии находится точка $C(-1;4;3)$, от координатной плоскости:

а) $Oxy$; б) $Oxz$; в) $Oyz$?

## Вариант №5

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 5. Начало координат находится в точке $B$.



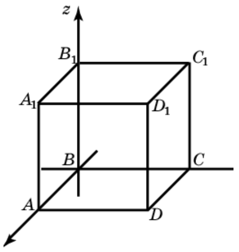

а)Назовите координаты вершин куба $A$, $D_1$, $C_1$.
б) Найдите длину диагонали $AC_1$
с)Найдите длину прямой соединяющей середины отрезков $A_1B_1$ и $DC$

2.На каком расстоянии находится точка $C(6;-3;2)$, от координатной плоскости:

а) $Oxy$; б) $Oxz$; в) $Oyz$?

## Вариант №6

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 4. Начало координат находится в точке $B$.




а)Назовите координаты вершин куба $A_1$, D, $C_1$.
б) Найдите длину диагонали $DB_1$
с)Найдите длину прямой соединяющей середины отрезков AD и $B_1C_1$

2.На каком расстоянии находится точка С(4;2;-5), от координатной плоскости:
а) *Oxy*; б) *Oxz*; в) *Oyz*?

## Практическое занятие №22 «Действия над векторами»

### Вариант №1

**1.** Даны точки А(2;-1;0), В(-3;2;1), С(1;1;4), найдите координаты точки D, если $\overline{CD} = -2\overline{AB}$

**2.** Найти скалярное произведение векторов заданных координатами, а также cosα угла между ними. Определить, тип угла *( острый, тупой, прямой)*

$\vec{a}$(0; 4; 9;); $\vec{в}$(6; 2; 1;)

**3.** Доказать что векторы коллинеарные и определить направление векторов

$\vec{a}$ (9; -1; 4); $\vec{в}$(3; -$\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}$)

**4.** Найти модуль вектора

$\vec{c}=2\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{в}$, если $\vec{a}$(1; 2; 3) $\vec{в}$(-3; 0; 2)

**5.** Перечислить свойства скалярного произведения векторов в пространстве.

### Вариант №2

1. Даны точки А(2;-1;0), В(-3;2;1), С(1;1;4), найдите координаты точки D, если $\overline{CB} = 2\overline{AD}$

2. Найти скалярное произведение векторов заданных координатами, а также cosα угла между ними. Определить, тип угла *( острый, тупой, прямой)*

$\vec{a}$(1; -3; 2;); $\vec{в}$(2; -3; 1;)

3. Доказать что векторы коллинеарные и определить направление векторов

$\vec{a}$ (1; 3; -6); $\vec{в}$(-1; -3; 6)

4. Найти модуль вектора

$\vec{m}=-4\vec{a}+\vec{в}$ если $\vec{a}$ (1; 3; 2) $\vec{в}$(-2; 10; -1)

5. Перечислить действия над векторами в пространстве и записать необходимые формулы

**Вариант №3**

1. Даны точки A(3;-1;2), B(-5;2;1), C(3;1;4), найдите координаты точки D, если $\overline{CD} = -2\overline{AB}$
2. Найти скалярное произведение векторов заданных координатами, а также cosα угла между ними. Определить, тип угла *( острый, тупой, прямой)*
   $\vec{a}$(0; 4; 9;); $\vec{в}$(3; 2; 1;)
3. Доказать что векторы коллинеарные, и определить направление векторов
   $\vec{a}$ (1; -2; 3) $\vec{в}$ (-2; -4; -6)
4. Найти модуль вектора $\vec{n} = \frac{1}{5}(\vec{a} - 2\vec{в}) - \vec{в}$

(*координаты взять из задания №2*)

5. Какие векторы называются коллинеарными и компланарными, равными, нулевым.

**Вариант №4**

1. Даны точки A(3;-1;2), B(-5;2;1), C(3;1;4), найдите координаты точки D, если $\overline{CB} = 2\overline{AD}$
2. Найти скалярное произведение векторов заданных координатами, а также cosα угла между ними. Определить, тип угла *( острый, тупой, прямой)*
   $\vec{a}$(1; 4; -2); $\vec{в}$(7; 2; 1;)
3. Доказать что векторы не коллинеарные и определить направление векторов $\vec{a}$ (-6; -2; 1) $\vec{в}$ ($\frac{1}{3}$; 9; 6)
4. Найти модуль вектора $\bar{z} = (8\bar{a} + 3\vec{в}) + \vec{a} - \vec{в}$
   (*координаты взять из задания №2*)

5. Что такое модуль вектора, какие векторы называются сонаправленными? Чем отличается система координат на плоскости от системы координат в пространстве?

## Вариант №5

1. Даны точки A(4;-1;3), B(1;2;-4), C(3;1;4), найдите координаты точки D, если $\overline{CD} = -2\overline{AB}$
2. Найти скалярное произведение векторов заданных координатами, а также cosα угла между ними. Определить, тип угла *( острый, тупой, прямой)*
   $\vec{a}(2;\ 3;\ 9;)$; $\vec{в}(3;\ -2;\ 1;)$
3. Доказать что векторы коллинеарные, и определить направление векторов $\vec{a}$ (6; 7; -8) $\vec{в}$ (18; 21; -24)
4. Найти модуль вектора $\overline{m} = (5\overline{a} - 6\vec{в}) + \vec{a}$ $\overline{z} = (8\overline{a} + 3\vec{в}) + \vec{a} - \vec{в}$ (*координаты взять из задания №2*)
5. Какие векторы называются коллинеарными и компланарными, равными, нулевым.

## Вариант №6

1. Даны точки A(1;-1;2), B(-5;4;1), C(3;6;4), найдите координаты точки D, если $\overline{CB} = 2\overline{AD}$
2. Найти скалярное произведение векторов заданных координатами, а также cosα угла между ними. Определить, тип угла *( острый, тупой, прямой)*
   $\vec{a}(1;\ 3;\ -2)$; $\vec{в}(-8;\ -1;\ 1;)$
3. Доказать что векторы не коллинеарные и определить направление векторов $\vec{a}$ (-6; -2; 1) $\vec{в}$ $(\frac{1}{3};\ 9;\ 6)$
4. Найти модуль вектора $\overline{z} = (8\overline{a} + 3\vec{в}) + \vec{a} - \vec{в}$ (*координаты взять из задания №2*)
5. Что такое модуль вектора, какие векторы называются сонаправленными? Чем отличается система координат на плоскости от системы координат в пространстве?

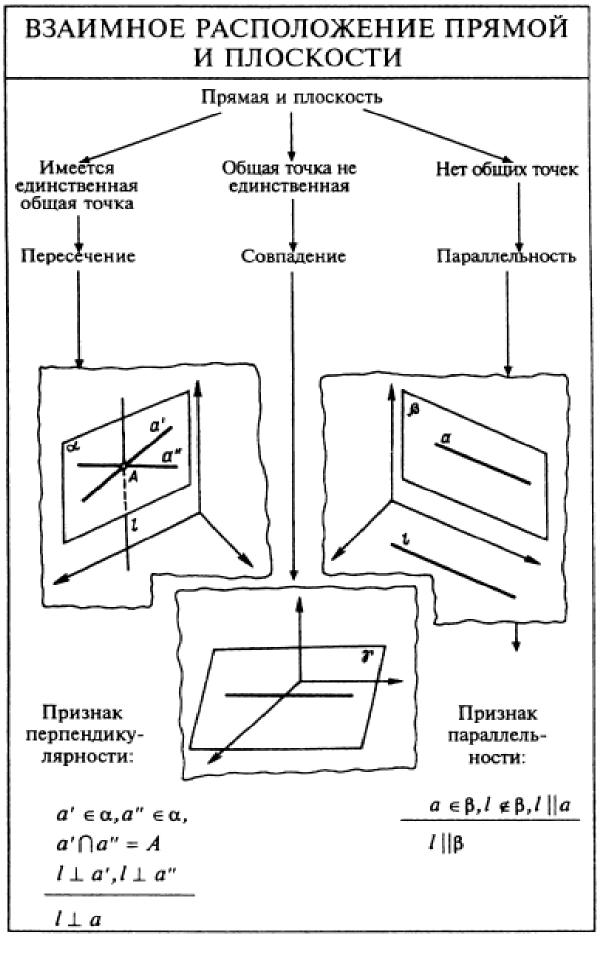
## Тема №11 «Прямые и плоскости в пространстве»

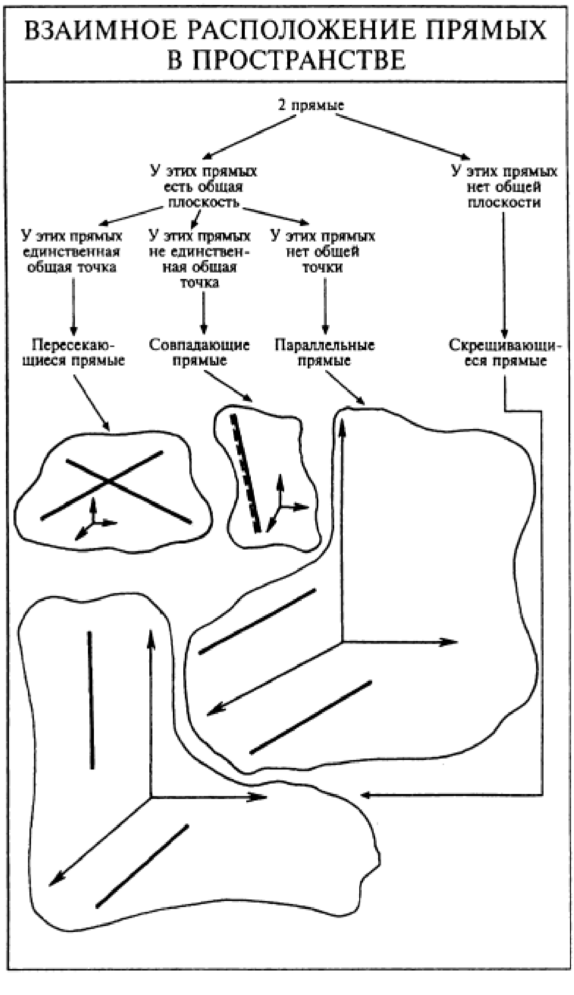
**Цель:** сформировать знания о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве, сформировать умения решать задачи по данной теме.

### Практическое занятие №23 «Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве»

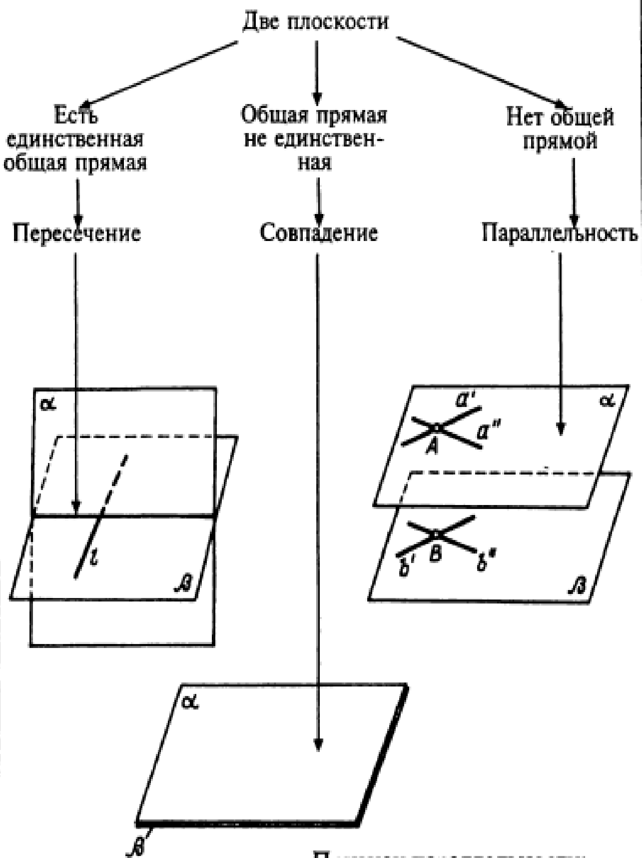
### Практическое занятие №24 «Перпендикуляр и наклонная. Теорема о трёх перпендикулярах»

### Теоретические сведения по выполнению практических занятий:



## ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ



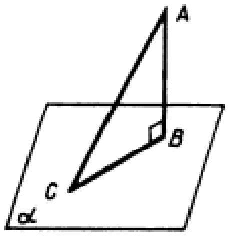
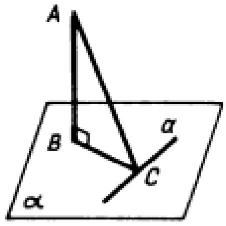
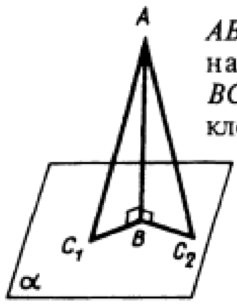
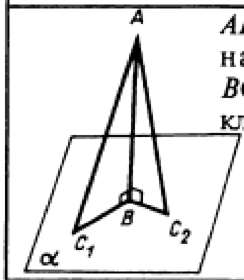

Признак перпендикулярности:

$$\frac{l \in \beta, l \perp \alpha}{\alpha \perp \beta}$$

Признак параллельности:

$$\frac{\begin{gathered} a' \in \alpha,\ a'' \in \alpha,\ a' \cap a'' = A \\ b' \in \beta,\ b'' \in \beta,\ b' \cap b'' = B \\ a' \parallel b',\ a'' \parallel b'' \end{gathered}}{\alpha \parallel \beta}$$

## НАКЛОННАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

| | | |
|---|---|---|
|  | $AB \perp \alpha$; $AC$ — наклонная; $C$ — основание наклонной; $CB$ — проекция наклонной | $AC > AB$ |
|  | $AB \perp \alpha$; $AC$ — наклонная; $C$ — основание наклонной; $BC$ — проекция; $a \subset \alpha$ | Теорема о трех перпендикулярах: «Если $a \perp BC$, следовательно, $a \perp AC$. Если $a \perp AC$, следовательно, $a \perp BC$» |
|  | $AB \perp \alpha$; $AC_1$, $AC_2$ — наклонные; $BC_1$, $BC_2$ — проекции наклонных. | Если $AC_1 = AC_2$, то $BC_1 = BC_2$. Если $BC_1 = BC_2$, то $AC_1 = AC_2$ |
|  | $AB \perp \alpha$; $AC_1$, $AC_2$ — наклонные; $BC_1$, $BC_2$ — проекции наклонных | Если $AC_1 > AC_2$, то $BC_1 > BC_2$. Если $BC_1 > BC_2$, то $AC_1 > AC_2$ |

Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

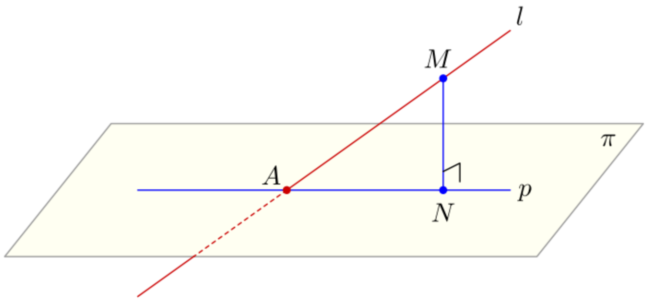
Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярная к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Рассмотрим плоскость $\pi$ и точку M, не принадлежащую этой плоскости. Из точки M проведём прямую, перпендикулярную плоскости $\pi$ и пересекающую её в точке N. Отрезок MN называется перпендикуляром, проведённым из точки M к плоскости $\pi$. Точка N называется основанием этого перпендикуляра. Если прямая пересекает плоскость и не перпендикулярна этой плоскости, то такая прямая называется наклонной.




Теорема о трех перпендикулярах: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

## Практическое занятие №23 «Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве»

### Вариант 1

1. Выполните чертеж к задаче. Прямые а, в, и с имеют общую точку О, но не существует плоскости, в которой лежат все эти три точки.
2. Выполните чертеж к задаче. Плоскость α проходит через середины сторон АВ и АС ΔАВС и не содержит вершины А.
3. Выполните чертеж куба $АВСДА_1В_1С_1Д_1$. По чертежу укажите: а) прямые параллельные для прямой АД; б) прямые скрещивающиеся с прямой $СС_1$; в) плоскости параллельные прямой АВ.
4. Прямая АВ пересекает плоскость α в точке О, расстояние от точки А до плоскости равно 4 см. Найдите расстояние от точки В до плоскости, если точка О середина АВ.

### Вариант 2

1. Выполните чертеж к задаче. Прямые а, в, и с имеют общую точку О и лежат в одной плоскости.
2. Выполните чертеж к задаче. Прямая а параллельна каждой из параллельных плоскостей α и β.
3. Выполните чертеж куба $АВСДА_1В_1С_1Д_1$. По чертежу укажите: а) прямые параллельные для прямой АВ; б) прямые скрещивающиеся с прямой $ДД_1$; в) плоскости параллельные прямой АД.

4. Прямая AB пересекает плоскость α в точке О, расстояние от точки А до плоскости равно 4 см. Найдите расстояние от точки В до плоскости, если точка В середина ОА.

## Вариант 3

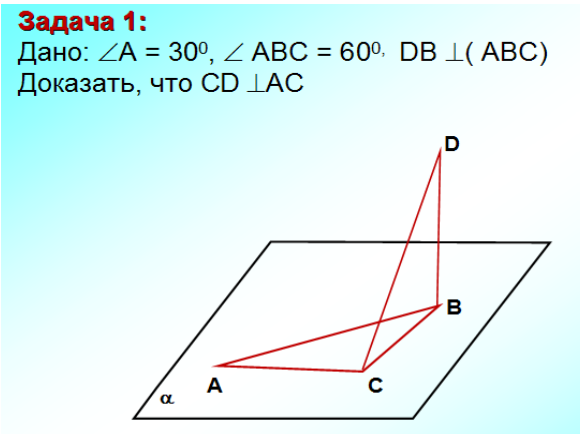
1. Выполните чертеж к задаче. Прямые СД и СК пересекают плоскость β в разных точках.
2. Выполните чертеж к задаче. Прямая AB параллельна плоскости γ, а прямая AT пересекает ее в точке Т.
3. Выполните чертеж куба $ABCДA_1B_1C_1Д_1$. По чертежу укажите: а) прямые параллельные для прямой СД; б) прямые скрещивающиеся с прямой AB; в) плоскости параллельные прямой ВС.
4. Прямая AB пересекает плоскость α в точке О, расстояние от точки А до плоскости равно 4 см. Найдите расстояние от точки В до плоскости, если точка А средина ОВ.

## Вариант 4

1. Выполните чертеж к задаче. Две вершины ΔABC лежат в плоскости γ, а вершина С не лежит в плоскости γ. Прямая d пересекает стороны СВ и СК соответственно в точках М и Т, а плоскость α в точке К.
2. Выполните чертеж к задаче. Плоскость α пересекает три параллельных прямых соответственно в точках А, В, и С, лежащих на одной прямой.
3. Выполните чертеж куба $ABCДA_1B_1C_1Д_1$. По чертежу укажите: а) прямые параллельные для прямой ВС; б) прямые скрещивающиеся с прямой $BB_1$; в) плоскости параллельные прямой AB.
4. Прямая AB пересекает плоскость α в точке О, расстояние от точки А до плоскости равно 4см. Найдите расстояние от точки В до плоскости, если ОА =8 см, AB=6 см.

## Практическое занятие №24
## «Перпендикуляр и наклонная. Теорема о трёх перпендикулярах»

## Вариант №1



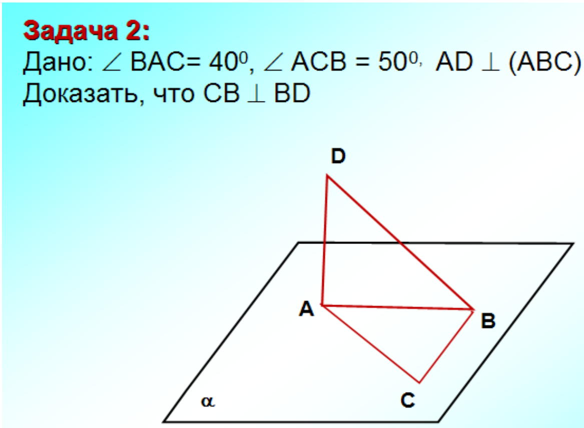

**2.** Из точки лежащей вне плоскости, проведены к этой плоскости две наклонные под углом $30^0$, равные $2\sqrt{3}$. Их проекции образуют между собой угол $120^0$. Определить расстояние между основаниями наклонных.

**3**. Из точки к плоскости прямоугольного треугольника с катетами 15 и 20 см проведён перпендикуляр длиной 16 см. Основание перпендикуляра - вершина прямого угла треугольника. Найдите расстояние от данной точки до гипотенузы.

**4.**Сформулируйте «теорему о трёх перпендикулярах», постройте соответствующий рисунок

## Вариант №2

**1.** Катеты прямоугольного треугольника *ABC* равны 12 и 16 дм. Из вершины прямого угла *C* восставлен к плоскости треугольника перпендикуляр *CM*=28 дм. Найти расстояние от точки *M* до гипотенузы.




**3.** Из точки к плоскости треугольника со сторонами 13, 14 и 15 см, проведён перпендикуляр, основание которого- вершина угла, противолежащего стороне 14 см. Расстояние от данной точки до этой стороны равно 20 см. Найдите расстояние от точки до плоскости треугольника

**4**. Сформулируйте теорему о перпендикуляре и наклонной, и постройте соответствующий теореме чертёж

## Вариант №3

1. Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 23 и 33 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости. Если проекции наклонных относятся как 2:3

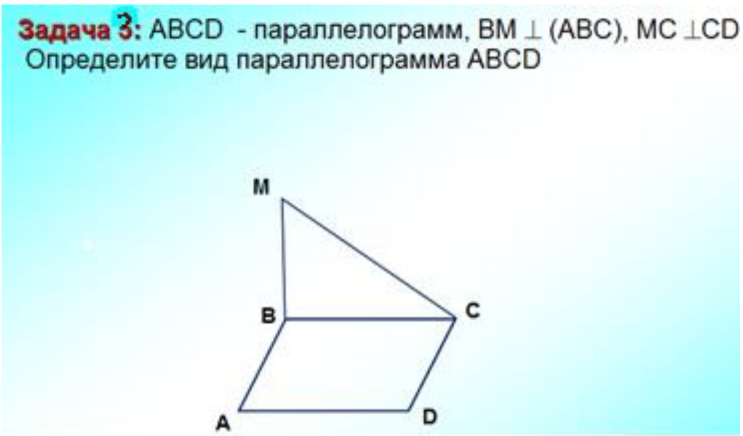
2. Из точки В к плоскости проведены две наклонные, которые образуют со своими проекциями на плоскость углы в $30^0$. Угол между наклонными равен $60^0$. Найдите расстояние между основаниями наклонных, если расстояние от точки В до плоскости равно $\sqrt{6}$ .


**4.**Сформулируйте свойства наклонных и их ортогональных проекций. Постройте соответствующие чертежи

## Вариант №4

1. Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 10 и 17 см. Разность проекций этих наклонных равна 9 см. Найдите проекции наклонных.

2. Из вершины B прямоугольника ABCD проведен к его плоскости перпендикуляр BM, $AB = 3$м, $BC = 2\sqrt{5}$м, $BM = 4$м. Найти площадь треугольника CDM.




4. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости, постройте соответствующий чертёж

## Вариант №5

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите перпендикулярность. Прямой AC и плоскости $B_1BD$

2. Из точки M к плоскости ромба ABCD, проведён перпендикуляр AM длиной 8 см. Известно, что расстояние от точки M, до прямой BC равно 10 см., $\angle B=120^o$. Найдите расстояние от точки M до прямой BD.

3. Дана трапеция ABCD (AD параллельно BC). К плоскости трапеции проведён перпендикуляр KM (точка M лежит на стороне CD). Диагональ BD является биссектрисой угла CDA. Постройте расстояние от точки K до прямой BD.

## Вариант №6

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите перпендикулярность. Прямой BD и плоскости $C_1CA$

2. Из точки М к плоскости ромба ABCD, проведён перпендикуляр BM длиной 8 см. Известно, что BD=6 см., $\angle A=60^o$, а расстояние от точки М, до прямой CD равно 6 см. Найдите расстояние от точки М до прямой AC.

3. Дана трапеция ABCD (AD параллельно BC). К плоскости трапеции проведён перпендикуляр КМ (точка М лежит на стороне CD). Диагональ AC является биссектрисой угла BCD. Постройте расстояние от точки К до прямой AC.

**Литература:** Башмаков М.И. Математика. Учебник для 11 кл. (базовый уровень). – М., Academia 2012.
Башмаков М.И. Математика: 10 кл. Сборник задач: учеб.пособие. – М.:Academia, 2008.
Богомолов Н.В. «Практические занятия по математике», – М.:Вентана-Граф,2010

## Тема 12 «Многогранники и круглые тела»

**Цель:** сформировать знания о призме, параллелепипеде, пирамиде, сформировать умения решать задачи по теме, научиться формулировать определение понятия цилиндра, знать формулы для нахождения площадей боковой и полной поверхностей цилиндра. сформировать определение понятия конуса, знать формулы для нахождения площадей боковой и полной поверхностей конуса. сформировать определение понятия усеченный конус, знать формулы для нахождения площадей боковой и полной поверхностей усеченного конуса; сформировать умения по вычислению объёмов многогранников и тел вращения

### Практическое занятие №25
### «Вычисление площадей многогранников»

### Практическое занятие №26 «Вычисление площадей круглых тел»
### Практическое занятие №27
### «Вычисление объёмов многогранников и круглых тел»

## Теоретические сведения по выполнению практических занятий:

***Многогранник*** — это такое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников

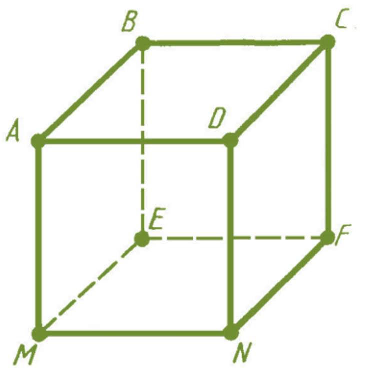



*рис. 5*

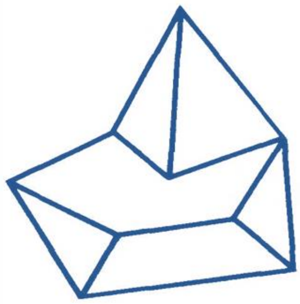


*рис. 4*

Многогранник называется ***выпуклым,*** если он расположен по одну сторону плоскости каждого плоского многоугольника на его поверхности

Эти многоугольники называются *гранями*, их стороны – *рёбрами,* их вершины – *вершинами многогранника.* Отрезки, соединяющие две вершины и не лежащие на одной грани, называются *диагоналями многогранника*.

***Призма*** – это многогранник, две грани которой ABCDE и $A_1B_1C_1D_1E_1$ ( *основания призмы* ) – равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а остальные грани ( $AA_1B_1B$, $BB_1C_1C$ и т.д. ) - параллелограммы, плоскости которых параллельны прямой ( $AA_1$, или $BB_1$, или $CC_1$ и т.д. ). Параллелограммы $AA_1B_1B$, $BB_1C_1C$ и т.д. называются *боковыми гранями*; *рёбра* $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ и т.д. называются *боковыми рёбрами.*

***Высота призмы*** – это *любой* перпендикуляр, опущенный из любой точки основания на плоскость другого основания. В зависимости от формы многоугольника, лежащего в основании, призма может быть соответственно: треугольной, четырёхугольной, пятиугольной, шестиугольной и т.д. Если боковые рёбра призмы перпендикулярны к плоскости основания, то такая призма называется *прямой*; в противном случае – это *наклонная призма*. На рисунке показаны прямая и наклонная призмы. Если в основании прямой призмы лежит *правильный*

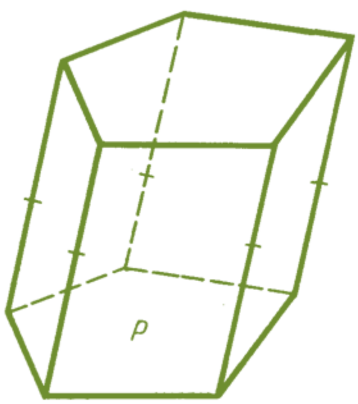



*рис. 7*

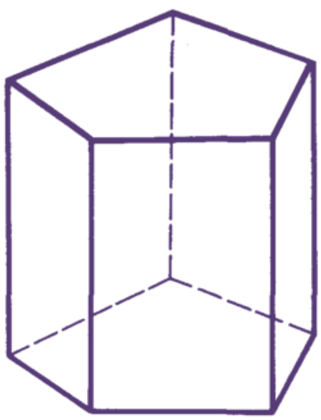


*рис. 11*

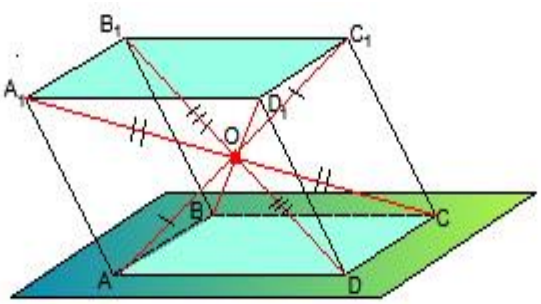
*многоугольник*, то такая призма также называется *правильной*.

***Свойства призмы***

1°. Основания призмы являются равными многоугольниками.

2°. Боковые грани призмы являются параллелограммами.

3°. Боковые ребра призмы равны.




***Параллелепипед*** - это *призма, основания которой параллелограммы.* Таким образом, параллелепипед имеет шесть граней и все они – параллелограммы. Противоположные грани попарно равны и параллельны. У параллелепипеда четыре диагонали; они все пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам. Если четыре боковые грани параллелепипеда – прямоугольники, то он называется *прямым*. Прямой параллелепипед, у которого все шесть граней – прямоугольники, называется *прямоугольным*. Диагональ прямоугольного параллелепипеда $d$ и его рёбра $a$, $b$, $c$ связаны соотношением: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ Прямоугольный параллелепипед, все грани которого квадраты, называется *кубом*. Все рёбра куба равны.

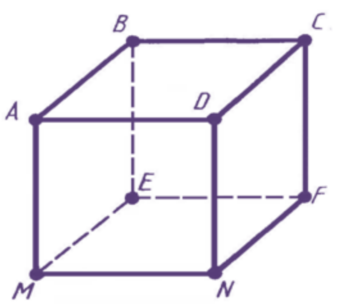



*рис. 5*

**Свойства параллелепипеда**

**1°**. У параллелепипеда 8 вершин, 12 ребер и 6 граней.

**2°**. Каждая грань параллелепипеда — параллелограмм.

**3°**. Противолежащие грани параллелепипеда равны.

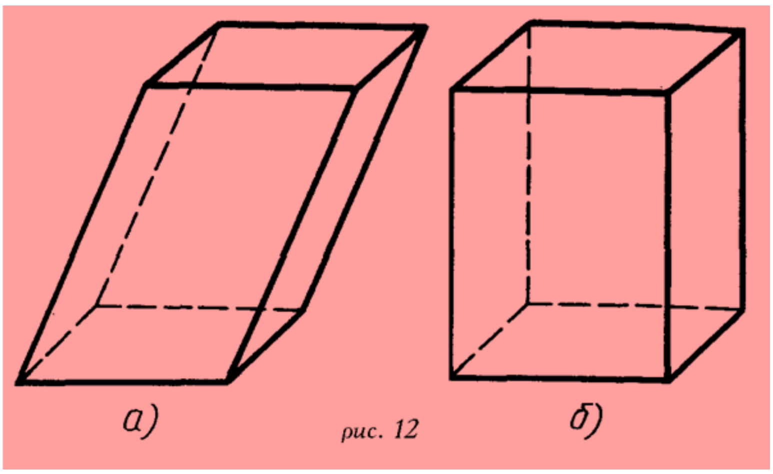



*рис. 12*

**4°.** Параллельные ребра параллелепипеда равны.

***Пирамида*** – это многогранник, у которого одна грань ( *основание пирамиды* ) – это произвольный многоугольник ( ABCDE, рис.80 ), а остальные грани ( *боковые грани* ) – треугольники с общей вершиной S, называемой *вершиной пирамиды*. Перпендикуляр SO, опущенный из вершины пирамиды на её основание, называется ***высотой*** *пирамиды*. В зависимости от формы многоугольника, лежащего в основании, пирамида может быть соответственно: треугольной, четырёхугольной, пятиугольной, шестиугольной и т.д.

Треугольная пирамида является *тетраэдром* ( *четырёхгранником* ), четырёхугольная – *пятигранником* и т.д. Пирамида называется *правильной*, если в *основании лежит правильный многоугольник,* а её *высота падает в центр основания.*

Все боковые рёбра правильной пирамиды равны; все боковые грани – равнобедренные треугольники. Высота боковой грани (SF) называется *апофемой* правильной пирамиды.

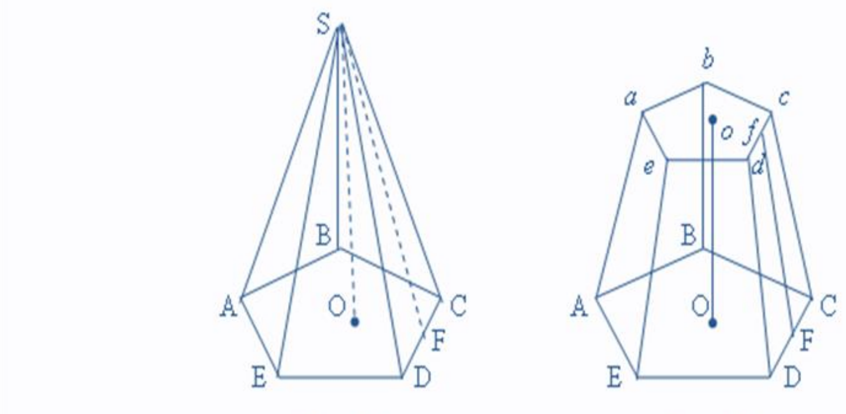



Рис. 80 Рис. 81

Если провести сечение *abcde*, параллельное основанию ABCDE ( рис.81 ) пирамиды, то тело, заключённое между этими плоскостями и боковой поверхностью, называется *усеченной пирамидой.* Параллельные грани ABCDE и *abcde* называются *основаниями*; расстояние Оо между ними – *высотой*. Усечённая пирамида называется *правильной*, если пирамида, из которой она была получена – *правильная*. Все боковые грани правильной усечённой пирамиды – равные равнобочные трапеции. Высота F*f* боковой грани (рис.81) называется *апофемой* правильной усечённой пирамиды.

**Свойства правильной пирамиды**

1°. Основание правильной пирамиды — правильный многоугольник.

2°. Боковые грани правильной пирамиды — равнобедренные треугольники.

3°. Боковые ребра правильной пирамиды равны.

***Цилиндром*** называется тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг прямой, содержащей его сторону.

Круги с центрами О и $O_1$ – основания цилиндра.

AD=BC=l – образующая. Длина образующей называется высотой цилиндра, радиус основания – радиус цилиндра.

AO=DO=R; AB=DC=D – диаметр

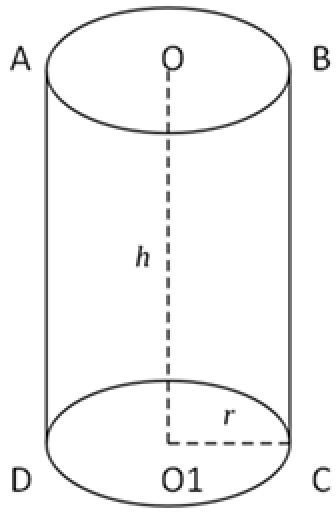
**Осевое сечение цилиндра** – прямоугольник ABCD.

Развертка цилиндра – прямоугольник и два круга.

За площадь боковой поверхности цилиндра принимается площадь ее развертки.

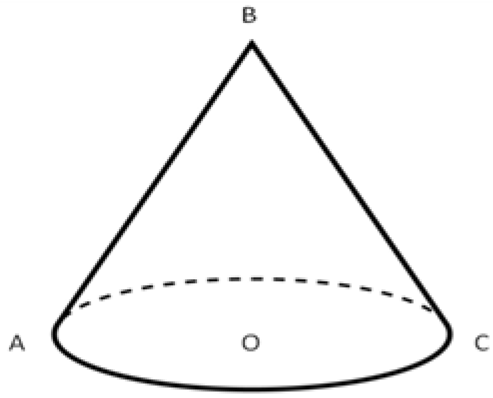
**Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту.**

$S_{бок.}=2\pi rh$



$S_{полной\ поверхности}=2\pi r(r+h)$
$V=S_0 h=\pi r^2 h$

**Конусом** называется тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей катет.




Точка В – вершина конуса. Круг с центром О – основание конуса. AB=BC=l – образующая. BO=h – высота конуса. BO=OC=R – радиус основания. AC=2R – диаметр основания. Осевое сечение – треугольник ABC.
Развертка конуса – сектор круга и круг.
За площадь боковой поверхности конуса принимается площадь его развертки.

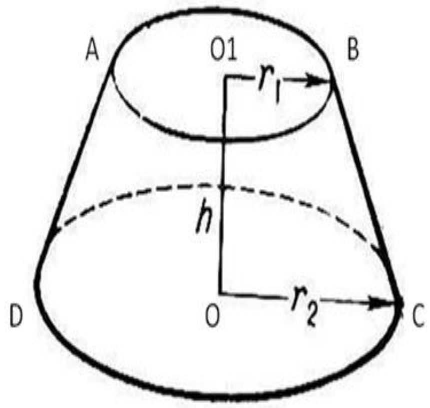
$S_{бок.}=\frac{\pi l^2}{360}\cdot\alpha$ , α – градусная мера угла развертки.

Площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую $S_{бок.}=\pi rl$

Площадь полной поверхности конуса равна сумме площадей боковой поверхности и основания $S_{кон.}=\pi r\left(l+r\right)$

$$V_{кон.}=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot h=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

**Усеченным конусом** называется часть конуса, заключенная между основанием и параллельным основанию сечением конуса.




Круги с центрами О и $O_1$ – основания (верхнее и нижнее) усеченного конуса.

$AO_1$=r, DO=R=$r_1$ – радиусы оснований.

AD=l – образующая. $OO_1$ – высота – расстояние между плоскостями оснований.

Осевое сечение – трапеция ABCD.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую.

$$S_{бок.}=\pi\left(r+r_1\right)l$$

$$S_{полн.}=S_1+S_2+S_{бок.}=\pi l\left(r+r_1\right)+\pi r_1^2+\pi r$$

$$V_{ус.кон.}=\frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2+r\cdot r_1+r^2\right)$$

**Объемом тела** называется положительная величина, характеризующая часть пространства, занимаемую телом, и обладающая **следующими свойствами**:

1) равные тела имеют равные объемы;
2) при параллельном переносе тела его объем не изменяется;
3) если тело разбить на части, являющиеся простыми телами, то объем тела равен объему его частей;
4) за единицу объема принят объем куба, ребро которого равно единице длины;

**Свойства объемов тел:**

1. Объем тела есть неотрицательное число;
2. Если геометрическое тело составлено из геометрических тел, не имеющих общих внутренних точек, то объем данного тела равен сумме объемов тел его составляющих;
3. Объем куба, ребро которого равно единице измерения длины, равен единице;
4. Равные геометрические тела имеют равные объемы.

**Следствие.** Если тело имеет объем V1 и содержится в теле, имеющем объем V2, то $V1 < V2$.

1.Объем куба равен кубу его ребра: $V=a^3$

2.Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его измерений: $V=abc$.

3. Объем прямого параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту: $V=SH$

4. Объем произвольного параллелепипеда равен произведению площади основания на его высоту: $V=SH$

5. Объем призмы равен произведению площади основания на высоту: $V=SH$

6. Две треугольные пирамиды, имеющие равные высоты и равные площади оснований, имеют равные объемы: $V1' = V2'$

7. Объем любой треугольной пирамиды равен одной третьей произведения площади ее основания на высоту: $V=1/3SH$

8. Объем любой пирамиды равен одной третьей произведения площади ее основания на высоту: $V=1/3SH$

9. Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту: $V= \Pi R^2H$

10. Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту: $V=1/3\Pi R^2H$

11. Объем усеченного конуса равен $V=1/3\ H(R^2+Rr+r^2)$, где R и r – радиусы оснований усеченного конуса.

12. Для подобных фигур на плоскости, имеющих площадь, верна теорема: отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия. Для подобных пространственных тел, имеющих объем, верна аналогичная теорема: отношение объемов подобных тел равно кубу коэффициента подобия.

**Литература:**


1) Атанасян Л.С. Геометрия. 10-11, учебник. С.140-144, 150-152 №574, 576-578, 586, 593-595, 597
2) Башмаков М.И. Математика. Задачник. С. 217 №8.73, 8.75


## Практическое занятие №25 «Вычисление площадей многогранников»

### Вариант №1

1. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб ABCD со стороной, равной а, и углом BAD, равным $60^0$. Плоскость $BC_1D$ составляет с плоскостью основания угол $60^0$. Площадь большого диагонального сечения равна 63 см$^2$. Найти площадь полной поверхности параллелепипеда.
2. В основании пирамиды DABC лежит прямоугольный треугольник ABC, угол C = $90^0$, угол A = $30^0$, BC = 10. Боковые ребра пирамиды равнонаклонены к плоскости основания. Высота пирамиды равна 5. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.
3. Основанием пирамиды SABC служит ABC, боковое ребро SA перпендикулярно основанию, а грань SBC составляет с ней угол в $45^0$. Найти полную поверхность пирамиды.

### Вариант №2

1. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм ABCD со сторонами 3см и 5см. Острый угол параллелограмма равен $60^0$. Площадь большого диагонального сечения равна 63 см$^2$. Найти площадь полной поверхности параллелепипеда.
2. В основании пирамиды MABCD лежит ромб ABCD, AC = 8, BD = 6. Высота пирамиды равна 1. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.
3. Основанием пирамиды SABCD служит прямоугольник ABCD, стороны которого AB = 8см, BC = 15см. Боковое ребро SB перпендикулярно основанию, а ребро SD составляет с плоскостью основания угол в $60^0$. Найти полную поверхность пирамиды.

### Вариант 3

1. Высота правильной треугольной пирамиды равна 4м. Боковая ее грань наклонена к плоскости основания под углом $45^0$. Вычислить площадь боковой поверхности пирамиды.
2. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 7м, а диагональ боковой грани 5м. Найти боковую поверхность призмы.
3. Определить боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна 5, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол $30^0$.

## Вариант 4

1. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 4м. Боковая ее грань наклонена к плоскости основания под углом $30^0$. Вычислить площадь боковой поверхности пирамиды.
2. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 6м, а боковая поверхность 32см$^2$. Найти боковую поверхность призмы.
3. Определить боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна 4, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол $45^0$.

## Вариант 5

1. Основанием пирамиды DABC является правильный треугольник ABC, сторона которого равна 5 см. Ребро DA перпендикулярно к плоскости ABC, а плоскость DBC составляет с плоскостью ABC угол $30°$. Найдите площадь боковой и площадь полной поверхности пирамиды.

*2.* Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб ABCD сторона которого равна 6см и угол равен $60°$. Плоскость $AD_1C_1$ составляет с плоскостью основания угол $60°$. Найдите:

а) Высоту ромба.

б) Высоту параллелепипеда.

в) Площадь боковой поверхности параллелепипеда.

г) Площадь поверхности параллелепипеда.

## Вариант 6

1. Основанием пирамиды MABCD является квадрат ABCD. Ребро MD перпендикулярно к плоскости основания, AD = DM = 4. Найдите площадь боковой и площадь полной поверхности пирамиды.

*2.* Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм ABCD, стороны которого равна $6\sqrt{2}$ и 12, острый угол равен $45°$. Высота параллелепипеда равна меньшей высоте параллелограмма. Найдите:

а) Меньшую высоту параллелограмма.

б) Угол между плоскостью $ABC_1$ и плоскостью основания.

в) Площадь боковой поверхности параллелепипеда.

г) Площадь поверхности параллелепипеда.

## Практическое занятие №26 «Вычисление площадей и многогранников круглых тел»

## Вариант№1

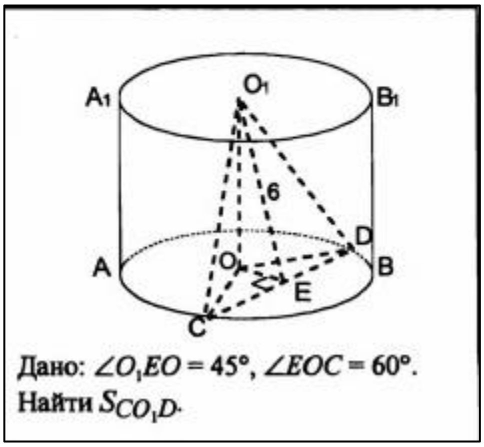
1. Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого 4 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

2. Радиус основания конуса равен 6 см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь сечения, проходящего через две образующие, угол между которыми равен 45° и площадь боковой поверхности конуса.

3. Дан цилиндр, $OO_1$ ось цилиндра, $AA_1BB_1$ осевое сечение цилиндра


## Вариант №2

1. Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь основания цилиндра равна $16\pi$ см$^2$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
2. Высота конуса равна 6 см, угол при вершине осевого сечения равен 90°. Найдите площадь сечения, проходящего через две образующие, угол между которыми равен 30° и площадь боковой поверхности конуса.
3. Дан цилиндр, $OO_1$ ось цилиндра, $AA_1BB_1$ осевое сечение цилиндра

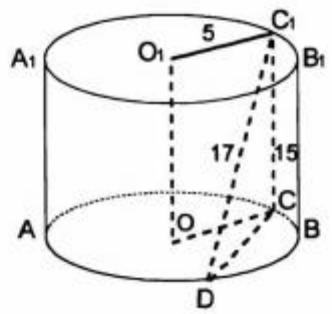



## Вариант №3

1. Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь основания цилиндра равна $25\pi$ см$^2$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

2. Высота конуса равна 9 см, угол при вершине осевого сечения равен 120°. Найдите площадь сечения, проходящего через две образующие, угол между которыми равен 90° и площадь боковой поверхности конуса.

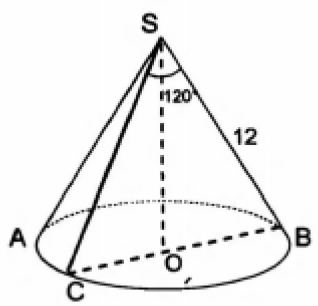
3. Дан цилиндр, $OO_1$ ось цилиндра, $AA_1BB_1$ осевое сечение цилиндра




Найти расстояние между прямыми $C_1D$ и $OO_1$.

## Вариант№4

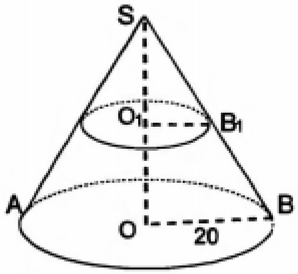
1. Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого равна 8 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
2. Радиус основания конуса равен 10 см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите площадь сечения, проходящего через две образующие, угол между которыми 30° и площадь боковой поверхности конуса.
3. Дан конус. SO – высота конуса




Найти $SO$ и $OB$.

## Вариант №5

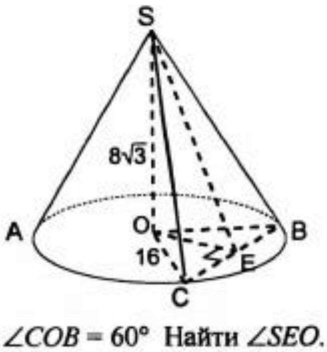
1. В цилиндре радиуса 5 см проведено параллельное оси сечение, отстоящее от нее на расстояние 3 см. Найдите высоту цилиндра, если площадь указанного сечения равна 64 см$^2$.
2. Угол при вершине осевого сечения конуса с высотой 1 м равен 60°. Чему равна площадь сечения конуса, проведенного через две образующие, угол между которыми равен 45°?
3. Дан конус. SO – высота конуса




**Дано:** $SO = 16$, $SO_1 = 4$.
**Найти площадь сечения конуса плоскостью, проходящй через точку $O_1$ параллельно основанию конуса.**

## Вариант №6

1. В цилиндре с высотой 6 см проведено параллельное оси сечение, отстоящее от нее на расстояние 4 см. Найдите радиус цилиндра, если площадь указанного сечения равна 36 см$^2$.
2. Угол при вершине осевого сечения конуса с высотой 1 м равен 120°. Чему равна площадь сечения конуса, проведенного через две образующие, угол между которыми равен 60°?
3. Дан конус. SO – высота конуса




**Дано:** $\angle COB = 60°$ **Найти** $\angle SEO$.

## Практическое занятие №27
## «Вычисление объемов многогранников и круглых тел»

### Вариант №1

**1.** Найдите объем параллелепипеда, если его основание имеет стороны *3 м* и *4 м*, угол между ними $30^0$, а одна из диагоналей параллелепипеда имеет длину *6 м* и образует с плоскостью основания угол $30^0$.

**2.** Чему равен объем правильной шестиугольной призмы со стороной основания $a$ и длиной большей диагонали $b$?

**3.** Найдите объем пирамиды, в основании которой лежит параллелограмм со сторонами *2* и $\sqrt{3}$ и углом между ними $30^0$, если высота пирамиды равна меньшей диагонали основания.

### Вариант№2

**1.** Найдите объем параллелепипеда, если его основание имеет стороны $\sqrt{8}$ и *5 м,* угол между ними $45^0$, а боковое ребро имеет длину $\sqrt{3}$ **м** и образует с плоскостью основания угол $60^0$.

**2.** Чему равен объем правильной треугольной призмы со стороной основания $a$ и расстоянием от вершины одного основания до противолежащей стороны другого основания, равным $b$.

**3.** Найдите объем пирамиды, в основании которой лежит параллелограмм с диагоналями *4* и *2* $\sqrt{3}$, если угол между ними $30^0$, а высота пирамиды равна меньшей стороне основания.

### Вариант № 3

**1.** В прямом параллелепипеде стороны основания, равные *4* и *6 см,* образуют угол $60^0$. Большая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол $45^0$. Найдите объем параллелепипеда.

**2.** Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды, у которой каждое ребро равно 4 см.

***3.*** Основанием пирамиды служит прямоугольник, длина стороны которого равна *15 см*, а длина его диагонали *24 см.* Найдите объем пирамиды, если каждое ее боковое ребро наклонено к основанию пирамиды под углом $45^0$.

## Вариант № 4

**1.** Основанием прямого параллелепипеда служит ромб со стороной *6 см* и углом *$120^0$*. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол *$45^0$*. Найдите объем параллелепипеда.

**2.** Найдите объем правильной треугольной пирамиды, у которой каждое ребро равно *3 см.*

**3.** Основание призмы – треугольник со сторонами *8, 9* и *11 см.* Найдите объем призмы, если высота ее равна большей высоте основания.

## Вариант № 5

**1.** Диагональ осевого сечения цилиндра 13 см, высота 5 см. Найдите объём цилиндра

**2.** Образующая прямого конуса равна 4 см и наклонена к плоскости основания под углом $30^0$. Найдите объём конуса.

**3.** Объём шара $228\pi$ см$^3$. Вычислите площадь поверхности шара.

## Вариант № 6

1. Вычислите объем правильной треугольной пирамиды со сторонами основания *5* и *8 см,* боковое ребро которой наклонено к плоскости основания под углом *$60^0$*.
2. Измерения прямоугольного параллелепипеда 15 м, 50 м, 36 м. Определите ребро куба, равновеликого прямоугольному параллелепипеда.
3. Вычислите объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды со сторонами основания *7* и *9 см,* а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом *$30^0$*.

## 4. Информационное обеспечение обучения

**Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы**

**Основные источники:**

1. Башмаков, М.И. Математика.: учебник / Башмаков М.И. - Москва: КноРус, 2019. - 394 с. - (СПО). - URL: https://book.ru/book/929528 (дата обращения: 04.09.2019). Текст : электронный.
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образов. М.: Академия 2014, 416 с.
3. Мерзляк А.Г.Алгебра: 9 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций. М.: Вентана-Граф, 2014, 304 с.
4. Геометрия (в 2-х частях). Часть 1: учебное пособие / Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев. - Москва: КноРус, 2016. - 396 с. - Режим доступа: http://www.book.ru/book /921519
5. Геометрия (в 2-х частях). Ч. 2: учебное пособие / Л.С. Атанасян, - Москва: КноРус, 2016. - 422 с. - Режим доступа: http://www.book.ru/book / 927669
6. Алпатов А.В. Математика [Электронный ресурс]: учебное пособие для СПО/ Алпатов А.В.— Электрон. текстовые данные.— Саратов: Профобразование, Ай Пи Эр Медиа, 2019.— 162 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/80328.html.— ЭБС «IPRbooks»

**Дополнительные источники:**

1. Башмаков М.И. Математика [Текст]: учеб. / М. И. Башмаков. - Москва: КноРус, 2013. - 400 с. - (Начальное и среднее профессиональное образование).
2. Ершова А.П., Голобородько В.В. Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и началам анализа для 10-11 кл, 5-е изд., - испр. - М.: ИЛЕКСА 2013. - 224 с.
3. Ершова А.П., Голобородько В.В. Самостоятельные и контрольные работы по геометрии для 10 кл, 6-е изд., - испр. - М.: ИЛЕКСА 2013. - 208 с
4. Ершова А.П., Голобородько В.В. Самостоятельные и контрольные работы по геометрии для 11 кл, 6-е изд., - испр. - М.: ИЛЕКСА 2013. - 208 с
5. Студенецкая В.Н. Решение задач по статистике, комбинаторике и теории вероятностей. 7-9 классы. – Волгоград: Учитель, 2008. – 429 с.
6. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учеб. Пособие для средних спец. учеб. Заведений.- 6 –е изд.., стер. – М.: Высш.шк.,2003.-495 с.

**Интернет-ресурсы:**

1. Образовательный портал для подготовки к экзаменам: Сдам ГИА, РЕШУ ЕГЭ (математика базовый и профильный уровень) Гущин Д. Д., 2011—2019[Электронный ресурс] https://ege.sdamgia.ru (дата обращения 04.09.2019)
2. Подготовка к ЕГЭ по математике 2013-2019 [Электронный ресурс] https://egemaximum.ru (дата обращения 04.09.2019)
3. Открытый_колледж: Математика 1999-2019_[Электронный ресурс] https://mathematics.ru/ (дата обращения 04.09.2019)