Департамент внутренней и кадровой политики Белгородской области

ОБЛАСТНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ

ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

«Белгородский индустриальный колледж»

Рассмотрено
предметно-цикловой комиссией
Протокол заседания №_________
от «___»________________20 г.
Председатель цикловой комиссии
__________________/_______________

Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине ЕН.01 МАТЕМАТИКА

для специальности

19.02.10 «Технология продукции общественного питания»

Разработала:

преподаватель Шатило В.А.

Белгород 2020

1. Пояснительная записка

1.1. Краткая характеристика дисциплины, ее цели и задачи. Место практических работ в курсе дисциплины

Цель настоящих методических указаний: оказание помощи обучащимся, в выполнении практических работ по дисциплине ЕН.01 «Математика», качественное выполнение которых поможет студентам освоить обязательный минимум содержания дисциплины и подготовиться к промежуточной аттестации в форме экзамена

1.2. Организация и порядок проведения практических работ

Практические работы проводятся после изучения теоретического материала в учебном кабинете математики. Введение практических занятий в учебный процесс служит связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, а так же для получения практических навыков и умений. На практическом занятии задания, выполняются студентом самостоятельно, с применением знаний и умений, усвоенных на предыдущих уроках, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя. Обучающиеся должны иметь методические рекомендации по выполнению практических работ, конспекты лекций, измерительные и чертежные инструменты, средства для вычислений.

1.3. Техника безопасности при выполнении практических работ

При работе в учебном кабинете запрещается:

- •находиться в кабинете в отсутствии преподавателя и на перемене;
- •вставать со своего места и ходить по кабинету без разрешения преподавателя;
- •размещать на рабочем месте посторонние предметы.

Обучающийся обязан:

- •спокойно, не торопясь, не задевая столы, входить в кабинет и занять отведенное ему место,
- •во время перемены покинуть кабинет,
- •работать на одном, закрепленном за ним месте;
- •приступать к работе по указанию преподавателя,
- •по окончанию работы сдать выданные материалы преподавателю,
- •привести свое рабочее место в порядок.

1.4 Общие указания по выполнению практических работ

Каждый вариант работы состоит из нескольких задач. Обучающийся должен решить задачи по варианту, номер которого укажет преподаватель. При выполнении практических работ надо придерживаться следующих правил:

1. Практическую работу следует выполнять в тетради чернилами синего цвета, оставляя поля.

2. На обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия обучающегося, его инициалы, номер специальности, название дисциплины, номер группы.

3. В заголовке работы должны быть указаны номер практической работы, тема практической работы, номер варианта, на полях указана дата выполнения работы

4. В работу должны быть включены задачи, указанные в практической работе, строго по предложенному варианту.

5. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие.

6. Решение задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые рисунки.

7. После получения проверенной работы, студент должен исправить все отмеченные ошибки, и сделать работу над ошибками

Основные требования к обработке результатов расчетов и оформлению работы. Выполненная Практическое занятие должна содержать:

1. Номер и тему практической работы, номер варианта, дату выполнения на полях.
2. Номер задачи и ее условие.
3. Подробное решение каждой задачи.
4. Полный ответ к каждой задаче.

1.5 Критерии оценки результатов выполнения практических работ

Критериями оценки результатов работы студентов являются:

- уровень усвоения студентом учебного материала;
- умение студента использовать теоретические знания при выполнении практических задач;
- сформированность ключевых (общеучебных) компетенций; • обоснованность и четкость изложения материала;
- уровень оформления работы. Анализ результатов. Если Практическое занятие выполнена в полном объеме и правильно оформлена, то ставится оценка «5». Если Практическое занятие выполнена более чем на 75%, ставится оценка «4». Если Практическое занятие выполнена более чем на 60%, ставится оценка «3». В противном случае работа не засчитывается и выставляется оценка «2»

2 Тематическое планирование практических занятий

Наименование тем	Вид и название работы студента	Количество часов на выполнение работы
Раздел 1. Определители и системы линейных уравнений.	**Практическое занятие №1.** Решение систем линейных уравнений.	**2**
Раздел 2. **Основы теории комплексных чисел**	**Практическое занятие №2** Арифметические действия над комплексными числами	**2**
Раздел 3. Теория пределов	**Практическое занятие №3** Предел последовательности, предел функции. Раскрытие неопределенностей вида 0/0 и $\frac{\infty}{\infty}$	**2**
	Практическое занятие №4 Первый и второй замечательные пределы. Непрерывность функции.	**2**
Раздел 4. Дифференциальное исчисление	**Практическое занятие №5** Нахождение производной элементарных и сложных функций.	**2**
	Практическое занятие №6 Исследование функций с помощью производной.	**2**
Раздел 5.Интегральное исчисление	**Практическое занятие №7** Нахождение неопределенных интегралов табличным методом и методом подстановки.	**2**
	Практическое занятие №8 Нахождение неопределенных интегралов методом интегрирования по частям.	**1**
	Практическое занятие №9 Вычисление определенного интеграла.	**1**
Раздел 6. Обыкновенные дифференциальные уравнения.	**Практическое занятие №10** Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.	**2**
	Практическое занятие №11Решение дифференциальных уравнений первого порядка	**2**
Раздел 7.Элементы теории вероятностей и математической статистики	**Практическое занятие №12** Применение основных теорем при решении задач.	**2**
	ИТОГО	**22**

3. Содержание практических занятий

Практическое занятие №1.

Решение систем линейных уравнений.

Цель занятия: Научиться решать системы уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса и методом Крамера.

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \qquad (1)$$

Систему 1 записывают короче:

$a_ix + b_iy + c_iz = d_i$, где $i = 1,2,3$

Здесь a_i, b_i, c_i, d_i- некоторые заданные числа, а x, y, z - искомые неизвестные. Как известно, тройка чисел $(x_0; y_0; z_0)$ называется решением системы 1, если при подстановке их в уравнения системы вместо x, y, z получаются верные числовые равенства.

Рассмотрим сначала случай, когда все коэффициенты уравнения системы 1 равны нулю: $a_i = b_i= c_i = 0$, $i = 1,2,3$.

В этом случае, если все свободные члены уравнений системы равны нулю: $d_1 = d_2 = d_3 = 0$, то, очевидно любая тройка чисел $(x; y; z)$ является решением этой системы. Если же не все свободные члены уравнений равны нулю, то система не имеет решений.

Рассмотрим теперь случай, когда не все коэффициенты уравнений системы 1 равны нулю. Пусть, например, $c_3 = 0$, тогда данная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ \frac{a_3}{c_3}x + \frac{b_3}{c_3}y + z = \frac{d_3}{c_3}. \end{cases}$$

Последнее уравнение этой системы умножим на c_1 и вычтем почленно из первого уравнения, в результате получим уравнение:

$$(a_1 - \frac{a_3}{c_3}c_1)x + (b_1 - \frac{b_3}{c_3}c_1)y = d_1 - \frac{d_3}{c_3}c_1 \qquad (2)$$

Аналогично, умножая последнее уравнение на c_2 и вычитая почленно из второго уравнения, получаем:

$$(a_2 - \frac{a_3}{c_3}c_2)x + (b_2 - \frac{b_3}{c_3}c_2)y = d_2 - \frac{d_3}{c_3}c_2 \qquad (3)$$

Очевидно, что система

$$\begin{cases} (a_1c_3 - a_3c_1)x + (b_1c_3 - b_3c_1)y = d_1c_3 - d_3c_1, \\ (a_2c_3 - a_3c_2)x + (b_2c_3 - b_3c_2)y = d_2c_3 - d_3c_2, \\ \frac{a_3}{c_3}x + \frac{b_3}{c_3}y + z = \frac{d_3}{c_3}. \end{cases} \qquad (4)$$

у которой первое уравнение получается из второго, второе - умножением на c_3, эквивалентна системе 1.

Таким образом, если $c_3 \neq 0$, то исследование системы 1 сводится к исследованию системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} (a_1c_3 - a_3c_1)x + (b_1c_3 - b_3c_1)y = d_1c_3 - d_3c_1, \\ (a_2c_3 - a_3c_2)x + (b_2c_3 - b_3c_2)y = d_2c_3 - d_3c_2. \end{cases} \qquad (5)$$

Рассмотрим сначала случай, когда все коэффициенты уравнений системы 5 равны нулю. Тогда, если свободные члены системы 5 равны нулю, то любая пара чисел является решением системы 5 и, следовательно, любая тройка чисел $(x; y; z)$, где $x \in R$, $y \in R$, $z = \frac{d_3}{c_3} - \frac{a_3}{c_3}x - \frac{b_3}{c_3}y$, является решением системы 1. Если же хотя бы у одного из уравнений системы 5 свободный член отличен от нуля, то система 5, а следовательно, и система 1 не имеют решений.

Рассмотрим случай, когда не все коэффициенты уравнений системы 5 равны нулю.

Пусть, например, $b_2c_3 - b_3c_2 \neq 0$.

Первое уравнение системы 5 умножим на $b_2c_3-b_3c_2$, второе - на $(b_1c_3 - b_3c_1)$ и сложим; после очевидных преобразований получим уравнение $\Delta \cdot x = \Delta x$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Таким образом, если $b_2c_3 - b_3c_2 \neq 0$, то система 5 эквивалентна системе:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta x \\ \dfrac{a_2c_3 - a_3c_2}{b_2c_3 - b_3c_2}\, x + y = \dfrac{d_2c_3 - d_3c_2}{b_2c_3 - b_3c_2}. \end{cases}$$

Если $\Delta = \Delta_x = 0$, то, очевидно, любая пара чисел $(x; y)$, где $x \in R$,

$$y = \frac{d_2c_3 - d_3c_2}{b_2c_3 - b_3c_2} - \frac{a_2c_3 - a_3c_2}{b_2c_3 - b_3c_2}\, x, \qquad (6)$$

является решением системы 5.

Из 6 и последнего уравнения системы 4 находим

$$z = \frac{b_2d_3 - b_3d_2}{b_2c_3 - b_3c_2} - \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{b_2c_3 - b_3c_2}\, x, \qquad (7)$$

Следовательно, если $\Delta = \Delta_x = 0$ и $b_2c_3 - b_3c_2 \neq 0$, то любая тройка чисел $(x; y; z)$, где $x \in R$, а y и z находятся по формулам 6 и 7, являются решением системы 1.

Если $\Delta = 0$, а $\Delta_x \neq 0$, то система 5, а следовательно, и система 1 не имеют решений.

Пусть теперь $\Delta \neq 0$. Тогда $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$. Подставив это значение x во второе уравнение системы 5, найдем: $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$,

где $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$

Наконец, подставив полученные значения x и y в третье уравнение системы 4, получим $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$,

где $\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

Следовательно, если $\Delta \neq 0$, то система 1 имеет единственное решение, которое находится по формулам $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$. (8)

Эти формулы называются формулами Крамера. Если определитель линейной системы не равен нулю, то система имеет единственное решение;

— если же определитель системы равен нулю, то она или не имеет решений, или имеет бесконечное множество решений.

Определители Δ_x , Δ_y , Δ_z , входящие в формулы Крамера, получаются из определителя заменой столбца из коэффициентов при соответствующих неизвестных на столбец из свободных членов.

Метод исследования и решения системы 1, который только что рассмотрен, называется методом исключения неизвестных или методом Гаусса.

При условии $c_3 \neq 0$ из третьего уравнения системы 1 неизвестное выражается через x и y и это значение для z подставляется в первое и второе уравнения. В результате получается система двух уравнений с двумя неизвестными. В этом случае говорят, что система трех уравнений с тремя неизвестными исключением неизвестного z сводится к системе двух уравнений с двумя неизвестными. Заметим, что вместо z можно исключить любое неизвестное и что исключаемое неизвестное можно находить из любого уравнения, в которое оно входит.

Пример 1: Решить систему:

$$\begin{cases} x=3, \\ 2x+y=8, \\ 4x-2y-z=3. \end{cases}$$

Решение: подставив x=3 во второе уравнение системы, получим: y=8-2x=8-2x 3=2. Подставив в третье уравнение системы x=3, y=2, получим: z=4x-2y-3=4 x 3-2 x 2-3=5.

Ответ: x=3, y=2, z=5.

Метод Гаусса. Это метод решения СЛУ путём последовательного исключения переменных. В результате этих действий преобразуем систему к треугольному виду.

В процессе преобразований уравнения можно менять местами.

Получившиеся уравнения с нулевыми коэффициентами и свободным членом отбрасываются. Если в процессе получили уравнение вида:

$0x_1+0x_2+\ldots+0x_n=b$, $b \neq 0$, то такое уравнение будет противоречивым и из-за него вся система несовместна.

После преобразований получаем систему треугольного вида, где внизу будет уравнение:

$a_{nn}x_n = b_n$, откуда найдём x_n. Далее поднимаясь снизу вверх найдём x_{n-1}, x_{n-2}, $\ldots x_1$.

Т.о., система имеет единственное решение.

Решать СЛУ методом Гаусса удобно, если делать преобразования не с уравнениями, а с матрицей из коэффициентов.

Примеры решения систем линейных уравнений методом Крамера и методом Гаусса.

Пример 1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 = -3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

система имеет единственное решение

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -4;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 2;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -2;$$

$$x_1 = \frac{-4}{-2} = 2;\ x_2 = \frac{2}{-2} = -1;\ x_3 = \frac{-2}{-2} = 1;$$

Пример 2: Решить СЛУ методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

Заменим систему уравнений расширенной матрицей из коэффициентов и свободных членов. Затем методом элементарных преобразований сведем ее к треугольному виду.

При этом строки матрицы можно менять местами.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & -27 & -29 & -39 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{2} & \frac{17}{2} \end{array}\right)$$

Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 - 5x_3 - 7x_4 = -8 \\ 2x_3 + x_4 = 1 \\ \frac{17}{2} x_4 = \frac{17}{2} \end{cases}$$

Решая систему обратным ходом, найдем

$x_4 = 1;\ \ x_3 = 0;\ \ x_2 = -1;\ x_1 = -1$

Задачи для самостоятельного решения

Решить системы уравнений методом Крамера и методом Гаусса:

Вариант 1

$$\begin{cases} 5x - 3y + 4z = 11 \\ 2x - y - 2z = -6 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

Вариант 2

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 1 \\ 3x + 6y - 2z = -2 \\ 2x + 2y - z = -2 \end{cases}$$

Вариант 3

$$\begin{cases} 5x + y - 3z = -2 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \\ 2x - 3y + z = 17 \end{cases}$$

Вариант 4

$$\begin{cases} 5x + 3y + 3z = 48 \\ 2x + 6y - 3z = 18 \\ 8x - 3y + 2z = 21 \end{cases}$$

Домашнее задание.

Решить систему уравнений методом Гаусса и методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 10 \\ x + 5y - 2z = -15 \\ 2x - 2y - z = 3 \end{cases}$$

Литература

1.Лунгу К.Н., Письменный Д.Т. Сборник задач по высшей математике. - М.: Наука, 2014
2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике. — М.: Высшая школа, 2014г.
3. Валуце И. И., Дилигул Г. Д. Математика для техникумов. — М.: Наука, 1990г.
4. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование. – М. ФОРУМ – ИНФРА – М 2012

Практическое занятие №2
«Арифметические действия над комплексными числами»

Цель занятия: Научиться выполнять арифметические операции над комплексными числами.

Комплексные числа - числа вида $x+iy$, где $x,y \in$ R, а i, такое число, что $i^2 = -1$. Множество комплексных чисел обозначается С.

Действия над комплексными числами.

Сложение:

$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$.

Умножение:

$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x1x2-y1y2+(x1y2+x2y1)i$.

Деление:

$x_1+iy1x2+iy2=(x1+iy1)(x2-iy2)(x2+iy2)(x2-iy2)=x1x2+y1y2+i(y1x2-x1y2)x22+y22=x1x2+y1$ $y2x22+y22+y1x2-x1y2x22+y22i$.

Действительные числа x и y комплексного числа $z=x+iy$, называются действительной и мнимой частью числа z и обозначаются, соответственно, $Rez=x$ и $Imz=y$.

Два комплексных числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ называются равными в том и только том случае, если $x_1=x_2$, $y_1=y_2$.

Запись $z=x+iy$ называют **алгебраической формой** комплексного числа z.

Числа $z_1=x+iy$ и $z_2=x-iy$ называют комплексно сопряженными.

Примеры решения задач:

1. Выполнить действия над комплексными числами, представив результат в алгебраичекой форме:

1) $(2+3i)(3-i)$.

Решение:$(2+3i)(3-i)=6-2i+9i-3i^2=6+7i+3=9+7i$.

Ответ: $9+7i$.

2) $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 2i$. Найти $\frac{z_2}{z_1}$

Решение. $\frac{z_2}{z_1} = \frac{2i}{3-i} = \frac{2i(3+i)}{(3-i)(3+i)} = -0,2+0,6i$.

3)z_1=1 + 2i, z_2 = −3i. Найти $\frac{\overline{z_2}}{z_1}$

Решение. $\frac{\overline{z_2}}{z_1} = \frac{3i}{1+2i} = \frac{3i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = 1,2+0,6i$.

4) (1+i)(3+i)3−i−(1−i)(3−i)3+i.
Решение.
(1+i)(3+i)3−i−(1−i)(3−i)3+i=(1+i)(3+i)(3+i)(3−i)(3+i)−
−(1−i)(3−i)(3−i)(3+i)(3−i)=9+15i+7i2+i39−i2−9−15i+7i2−i39−i2=
=9+15i−7−i−9+15i+7−i10=2810i=145i.
Ответ: 145i.

2. Найти действительные решения следующего уравнения:
(1+i)x+(−2+5i)y=−4+17i.
Решение.
(1+i)x+(−2+5i)y=−4+17i⇒
x+xi−2y+5yi=−4+17i⇒
(x−2y)+(x+5y)i=−4+17i⇒
{x−2y=−4x+5y=17⇒{x=2y−42y−4+5y=17⇒{x=2y=3.
Ответ:x=2;y=3.

3. Решить уравнение $(2 + i)x^2 - (5 - i)x + (2 - 2i) = 0$.
Решение.По формуле корней квадратного уравнения имеем:

$$x_{1,2} = \frac{5-i \pm \sqrt{(5-i)^2 - 4(2+i)(2-2i)}}{2(2+i)} = \frac{5-i \pm \sqrt{-2i}}{4+2i}$$

Извлекая корень квадратный из числа $-2i$, получаем
$\sqrt{-2i} = \pm(1-i)$.
Следовательно,

$$x_1 = \frac{5-i+1-i}{4+2i} = \frac{6-2i}{4+2i} = \frac{3-i}{2+i} = \frac{5-5i}{5} = 1-i;$$

$$x_2 = \frac{5-i-1+i}{4+2i} = \frac{4}{4+2i} = \frac{2}{2+i} = \frac{4-2i}{5} = 0,8-0,4i.$$

Ответ: $1 - i$; $0,8 - 0,4\,i$.
4. Найти значение функции

$$f(x) = x^4 + \frac{2+i}{x} - (-3+2i) \text{ при } x = 1 - 2i .$$

Решение. $f(1-2i) = (1-2i)^4 + \frac{2+i}{1-2i} - (-3+2i)$.

Вычислим второе слагаемое: $\frac{2+i}{1-2i} = \frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{5i}{5} = i$.

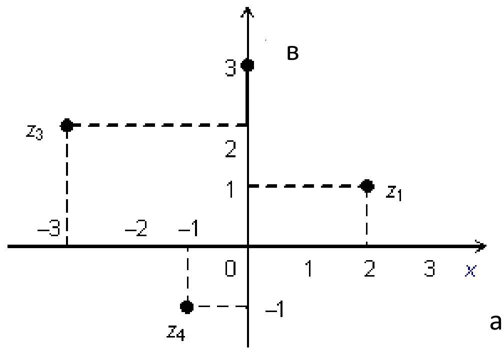
Вычислим первое слагаемое: $((1-2i)^2)^2 = 1 - 8i - 24 + 32i + 16 = -7 + 24i$.
Такимобразом, f(l −2i) = (−7 + 24i) + i − (−3 + 2i) = −4 + 23i .

Ответ: $-4 + 23i$.

5. Изобразим на комплексной плоскости числа

$Z_1 = 2 + i$; $z_2 = 3i$; $z_3 = -3 + 2i$; $z_4 = -1 - i$.

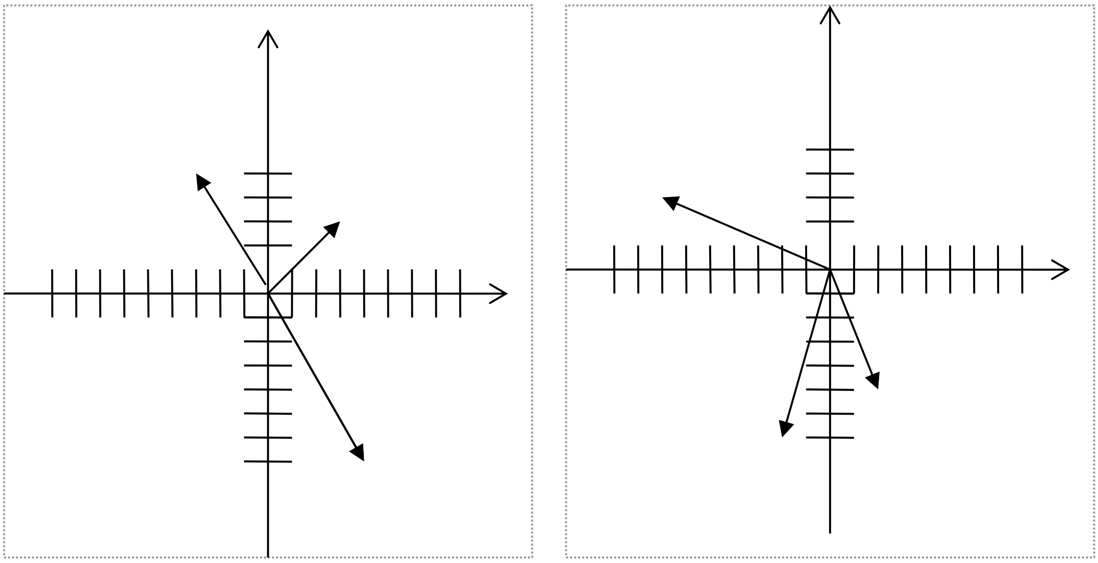
Решение:



Задания для самостоятельного решения

Вариант 1	***Вариант 2***
1. Изобразите на плоскости заданные комплексные числа:	
$Z_1 = 4i$	$Z_1= -5i$
$Z_2 = 3 + i$	$Z_2= 4 + i$
$Z_3= - 4 +3i$	$Z_3= -7 + 2i$
$Z_4= - 2 -5i$	$Z_4= -3 - 6i$
2 . Вычислите модули заданных комплексных чисел	
$Z5 = 3 + 4i$	$Z5 = 8 + 6i$
3. Произведите сложение и вычитание комплексных чисел:	
а) $(3 + 5i) + (7 - 2i)$.	$(3 - 2i) + (5 + i)$.
б) $(6 + 2i) + (5 + 3i)$.	$(4 + 2i) + (- 3 + 2i)$.
в) $(- 2 + 3i) + (7 - 2i)$.	$(- 5 + 2i) + (5 + 2i)$.
г) $(5 - 4i) + (6 + 2i)$.	$(- 3 - 5i) + (7 - 2i)$.
4. Произведитеумножениекомплексныхчисел:	
а) $(2 + 3i)(5 - 7i)$.	$(1 -i)(1 + i)$.
б) $(6 + 4i)(5 + 2i)$.	$(3 + 2i)(1 + i)$.
в) 11) $(3 - 2i)(7 - i)$.	$(6 + 4i)3i$.
г) $(- 2 + 3i)(3 + 5i)$.	$(2 - 3i)(- 5i)$.
№ 5. Выполните действия:	
а) $(3 + 5i)^2$.	а) $(3 + 2i)^2$.
б) $(2 - 7i)^2$.	б) $(3 - 2i)^2$.
в) $(6 + i)^2$.	в) $(4 + 2i)^2$.
г) $(1 - 5i)^2$.	г) $(5 - i)^2$.
6. Выполнитедействия:	
а) $(3 + 2i)(3 - 2i)$.	а) $(7 - 6i)(7 + 6i)$.
б) $(5 + i)(5 - i)$.	б) $(4 + i)(4 - i)$.
в) $(1 - 3i)(1 + 3i)$.	в) $(1 - 5i)(1 + 5i)$.
7. Решите уравнения:	
а) $x^2 - 4x + 13 = 0$.	а) $2{,}5x^2 + x + 1 = 0$.
б) $x^2 + 3x + 4$	б) $4x^2 - 20x + 26 = 0$.

8. На рисунке показано графическое изображение комплексных чисел. Перерисуйте рисунок в тетрадь. Обозначьте комплексные числа как z_1, z_2, z_3. Запишите соответствующие аналитические формы.



Домашнее задание.

Выполнить действия над комплексными числами, представив результат в алгебраичекой форме:

1. $(1+2i)2$.
2. $(1-i)3-(1+i)3$.
3. $11+4i+14-i$.
4. $(1-i1+i)3$.

Решить следующие системы линейных уравнений:

1. $(3-i)z1+(4+2i)z2=1+3i$;
   $(4+2i)z_1-(2+3i)z_2=7$.

2. $(2+i)z_1+(2-i)z_2=6$;
   $(3+2i)z_1+(3-2i)z_2=8$.

Литература:

1.Лунгу К.Н., Письменный Д.Т. Сборник задач по высшей математике. - М.: Наука, 2014
2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике. — М.: Высшая школа, 2014г.
3. Валуце И. И., Дилигул Г. Д. Математика для техникумов. — М.: Наука, 1990г.
4. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование. – М. ФОРУМ – ИНФРА – М 2012

Практическое занятие№3
Предел последовательности, предел функции. Раскрытие неопределенностей вида 0/0 и $\frac{\infty}{\infty}$

Цель занятия: Повторить основные теоремы о пределах, научиться вычислять значения пределов функции при $x \to a, x \to \infty$, используя замечательные пределы.

Основные теоремы о пределах.

1. Если C - постоянная величина, то $\lim\limits_{x\to a} C(x) = c$
2. Если C – const, то $\lim\limits_{x\to a} Cf(x) = C\lim\limits_{x\to a} f(x)$

3. Если существуют конечные пределы $\lim_{x\to a} f_1(x)$ и $\lim_{x\to a} f_2(x)$, то

1) $\lim_{x\to a}(f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x)$

2) $\lim_{x\to a}(f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x)$

3) $\lim_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}, \quad \lim_{x\to a} f_2(x) \neq 0$

4) $\lim_{x\to a}(f_1(x))^{f_2(x)} = (\lim_{x\to a}(f_1(x))^{\lim\limits_{x\to a}(f_2(x)}$

4. Если в некоторой окрестности точки x=a (кроме, быть может самой точки a) выполнено условие $f(x) = \varphi(x)$ и если предел одной из этих функций в точке a существует, то

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \varphi(x)$$

5. Если существует $\lim_{x\to a} \varphi(x)$ и $f(x)$ - элементарная функция, то

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x\to a} \varphi(x)) .$$

Если функция *f(x)* в предельной точке *x=a* не определена, тогда вычисление предела требует индивидуального подхода. В одних случаях вопрос сводится к применению теории о свойствах бесконечно малой и бесконечно большой функций и связи между ними.

Более сложными случаями нахождения предела являются такие, когда подстановка предельного значения аргумента в выражение для f(x) приводит к одной из неопределенностей: $\infty - \infty;\ 0 \cdot \infty;\ \frac{\infty}{\infty};\ \frac{0}{0};\ 1^{\infty};\ 0^0;\ \infty^0$

Здесь можно воспользоваться замечательными пределами:

1 – й замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

2 – й замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$

и правиломвычисленияпределов отношения при $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^k + a_{1x}x^{k-1} + \ldots + a_k}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n} = \begin{cases} \infty, если...k > n \\ \dfrac{a_0}{b_0}, если..k = n \\ 0, если...k < n \end{cases}$$

при раскрытии неопределенностей используют следующие приемы:

1) Сокращение дроби на множитель $(x-a)^{\alpha}$ при $x \to a$.
2) Избавление от иррациональности в числителе или знаменателе дроби.
3) Разложение многочленов на линейные или квадратичные множители при $x \to a$

Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x+2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+2)(x-2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2}(x-2) = -4$

2) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3(x-\frac{1}{3})(x+1)}{(3x-1)(9x^2+3x+1)}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{x+1}{9x^2+3x+1}=\dfrac{4}{3\cdot 3}=\dfrac{4}{9}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+5}{x^3+3x+7}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^2}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+\frac{5}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{3x}{x^3}+\frac{7}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{1+\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x^3}}=\dfrac{0-0+0}{1+0+0}=0$

4) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{(x+1)-2}{(x-1)(x+1)}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$

5)

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2})=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2})}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1-x-2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}=\dfrac{1-0}{0}=\infty$

Вычислить пределы, используя замечательные:

1)

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x}{7x}\cdot\dfrac{7x\cdot 3x}{\sin 3x\cdot 3x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 7x}{7x}\cdot\dfrac{3x}{\sin 3x}\cdot\dfrac{7x}{3x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x}{7x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\sin 3x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{7x}{3x}=$

$=1\cdot1\cdot\dfrac{7}{3}=\dfrac{7}{3}$

2)

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg10x}{\sin^2 2x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 10x}{\cos10x\cdot\sin^2 2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 10x\cdot 10x}{10x\cdot\cos10x\cdot\sin^2 2x}=\underbrace{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 10x}{10x}}_{1}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5\cdot 2x}{\cos10x\cdot\sin^2 2x}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\sin 2x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5}{\cos10x\cdot\sin 2x}=1\cdot\dfrac{1}{0}=\infty$

3)

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x-1})^{x-1+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^{x-1}\cdot\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^1=$

$\underbrace{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^{x-1}}_{e}\cdot\underbrace{\lim\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)}_{1}=e$

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos(x)}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos(x)}=$

$=1\cdot\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to0}\cos(x)}=1\cdot\dfrac{1}{1}=1.$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

Преобразуем дробь так, чтобы выделить первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{3x}{2x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot\frac{3}{2}}{}=1\cdot 1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$

$$2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 0=0$$

Задачи для самостоятельного решения

ВАРИАНТ 1

1. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x^2-6x+9}$ 2. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{4-x}$ 3. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2-4x-5}$ 4. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-5x+6}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-7x^4+5}{x^2-4}$	1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tgx}{2x}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 2x}{4x^3}$

ВАРИАНТ 2

1. $\lim\limits_{x\to 36}\frac{6-\sqrt{x}}{36-x}$ 2. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2-4x-5}$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-5x^4+4}{x^2-8}$ 4. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{2x^2-x-6}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4+2x^2-3x+5}{5-x^8+4x^7-x^2}$	1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-x}{x}\right)^x$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 5x}{4x^2}$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x+1}\right)^{-x}$

1. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-7x^4+5}{x^2-4}$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x^2-5}{4-8x^4+2x}$ 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+5x^2-3+2x}{5-x^8+4x^7-x^6}$ 5. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x+6}{2x^2+4x}$	1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{4x+1}\right)^{3x}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{2x^2}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2 x}{2x}$

ВАРИАНТ 4

1. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x+1}{5x-6x^2+9}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x-x^2}{3x+4}$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4-8x+4}{3-10x^6+2x^3}$ 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$ 5. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x+4}$	1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{10x^2}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{x+1}$ *3.* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{3x}\right)^{\frac{x}{5}}$

Практическое занятие №4
«Вычисление пределов с помощью замечательных»

Вариант 1	*Вариант 2*
1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 5x}$.	1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{tg\,5x}$.
2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{ctg\,2x}{5x}$.	2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{ctg\,4x}{5x}$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^x$.	3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)^x$.
4. $\lim\limits_{x\to 2}(1+\dfrac{1}{x})^x$.	4. $\lim\limits_{x\to 3}(1+\dfrac{1}{x})^x$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{5x}$	5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{tg\,5x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{4x^2}$	6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{2x^2}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{-\frac{1}{3}x}$.	7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^x$

Литература

1.Лунгу К.Н., Письменный Д.Т. Сборник задач по высшей математике. - М.: Наука, 2014

2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике. — М.: Высшая школа, 2014г.

3. Валуце И. И., Дилигул Г. Д. Математика для техникумов. — М.: Наука, 1990г.

4. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование. – М. ФОРУМ – ИНФРА – М 2012

Практическое занятие №5
«Нахождение производных элементарных и сложных функций»

Цель занятия: повторить правила и формулы вычисления производных, закрепить навыки вычисления производных.

Теоретический материал.

Пусть величина *у*зависит от аргумента *х* как $y = f(x)$. Если $f(x)$ была зафиксирована в двух точках значениях аргумента: x_1, x_2, то мы получаем величины $y_1 = f(x_1)$, и $y_2 = f(x_2)$. Разность двух значений аргумента x_2, x_1 назовём **приращением аргумента** и обозначим как $\Delta x = x_2 - x_1$. Если аргумент изменился на $\Delta x = x_2 - x_1$, то функция изменилась (приросла) как разность двух значений функции
$y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ на величину приращения функции Δf. Записывается обычно так: $\Delta f = y_1 - y_2 = f(x_2) - f(x_1)$. Считается, что если величины x_2 и x_1, бесконечно близки по величине друг к другу, тогда $\Delta x = x_2 - x_1$, - бесконечно мало.

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δf в этой точке к приращению аргумента Δx, когда последнее стремится к нулю (бесконечно мало). $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Нахождение производной называется **дифференцированием**. Функция *f*, имеющая производную в каждой точке некоторого промежутка, называется **дифференцируемой** на данном промежутке.

Правила дифференцирования(*u, v, w*— функции аргумента *x,* по которому производится дифференцирование, с - постоянная).

1. Производная алгебраической суммы $(u+v-w)' = u' + v' - w'$

2. Производная произведения $(uv)' = u'v + uv'$; $(cu)' = cu'$; $(\frac{u}{c})' = (\frac{1}{c}u)' = \frac{1}{c}u'$

3. Производная частного (дроби) $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0)$; $(\frac{c}{v})' = -\frac{cv'}{v^2}$. 4. Производная сложной функции (функции от функции).

Если $y = f(u), u = \varphi(x),$ *то* $y' = f'(u)\varphi'(x)$

Порядок выполнения работы.

1)Изучите примеры нахождения производных.

Пример 1. Найдите производную функции:

$$y = x^7 + x^3;\ 2)\ y = x^8(2x + x^4);\ 3)\ y = \frac{x+2}{5-x}.$$

Решение

1) $y' = (x^7 + x^3)' = (x^7)' + (x^3)' = 7x^6 + 3x^2.$

2) $y' = (x^8(2x + x^4))' = (x^8)' \cdot (2x + x^4) + x^8 \cdot (2x + x^4)';$

Учитывая, что $(x^8)' = 8\ x^7$; $(2x + x^4)' = (2x)' + (x^4)' = 2 \cdot x' + 4x^3 = 2 + 4x^3$, имеем

$$y' = 8x^7(2x + x^4) + x^8 \cdot (2 + 4x^3) = 16x^8 + 8x^{11} + 2x^8 + 4x^{11} =$$
$$= 18x^8 + 12x^{11}.$$

3)

$$y' = (\frac{x+2}{5-x})' = \frac{(x+2)' \cdot (5-x) - (x+2) \cdot (5-x)'}{(5-x)^2}.$$

Учитывая, что $(x+2)' = x' + 2' = 1 + 0 = 1$, $(5-x)' = 5' - x' = 0 - 1 = -1$, имеем

$$y' = \frac{1 \cdot (5-x) - (-1) \cdot (x+2)}{(5-x)^2} = \frac{5 - x + x + 2}{(5-x)^2} = \frac{7}{(5-x)^2}.$$

Пояснения

В задании 1 надо найти производную суммы по формуле $(u+v-w)' = u' + v' - w'$;

в задании 2 – производную произведения $(uv)' = u'v + uv'$; в задании 3 – производную частного $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0)$.

Также в заданиях 1 и 2 следует использовать формулу $x^n = nx^{n-1}$, а в задании 2 учесть, что при вычислении производной $2x$ постоянный множитель 2 можно вынести за знак производной

Пример 2. Вычислите значение производной функции $f(x) = x^2 - 5\sqrt{x}$ в точках $x = 4$ и $x = 0{,}01$.

Решение.

$$f'(x) = (x^2 - 5\sqrt{x})' = (x^2)' - 5(\sqrt{x})' = 2x - \frac{5}{2\sqrt{x}}.$$

$$f'(4) = 2 \cdot 4 - \frac{5}{2\sqrt{4}} = 8 - \frac{5}{4} = 6\frac{3}{4}.$$

$$f'(0{,}01) = 2 \cdot 0{,}01 - \frac{5}{2\sqrt{0{,}01}} = 0{,}02 - \frac{5}{2 \cdot 0{,}1} =$$

$$= 0{,}02 - \frac{5}{0{,}2} = 0{,}02 - 25 = -24{,}98.$$

Пояснения

Для нахождения производной в указанных точках достаточно найти производную данной функции и в полученное выражение подставить заданные значения аргумента. При вычислении производной следует учесть, что заданную разность можно рассматривать, как алгебраическую сумму выражений x^2 и $(-5\sqrt{x})$, а при нахождении производной $(-5\sqrt{x})$ за знак производной вынести постоянный множитель (- 5).

Пример 3. Найдите значения x, при которых производная функции $f(x) = x^4 - 32x$ равна 0.

Решение

$$f'(x) = (x^4 - 32x)' = (x^4)' - (32x)' = 4x^3 - 32.$$

$f'(x) = 0$. Тогда $4x^3 - 32 = 0, x^3 = 8, x = 2.$

Ответ: $x = 2$.

Пояснения

Чтобы найти соответствующие значения x, достаточно найти производную данной функции, приравнять её к нулю и решить полученное уравнение.

Пример 4. Найдите производную функции:

1) $f(x) = (x^3 - 1)^{-7}$; 2) $f(x) = \sqrt{5x^2 + x}.$

Решение.

1) $f'(x) = ((x^3 - 1)^{-7})' = -7(x^3 - 1)^{-7-1} \cdot (x^3 - 1)'.$

Учитывая, что $(x^3 - 1)' = (x^3)' - 1' = 3x^2 - 0 = 3x^2$, получаем

$$f'(x) = -7(x^3 - 1)^{-8} \cdot 3x^2 = -21x^2(x^3 - 1)^{-8} = -\frac{21x^2}{(x^3 - 1)^8} 0.$$

2) $f'(x) = (\sqrt{5x^2 + x})' = (\sqrt{5x^2 + x})' \cdot (5x^2 + x)' =$

$$\frac{1}{2\sqrt{5x^2 + x}} \cdot (10x + 1) = \frac{10x + 1}{2\sqrt{5x^2 + x}}.$$

Пояснения

В заданиях 1 и 2 необходимо найти соответственно производную степени и корня, но в основании степени и под знаком корня стоит не аргумент *x,* а выражение с этим аргументом (тоже функция от *x*). Следовательно, необходимо найти производные сложных функций.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Найдите производные функций

Вариант	Функции
1	а) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x}}$, в) $y=3^{x^2+\frac{1}{x^2}}$, д) $y=\log_5^2\left(x^2+\sqrt{x}\right)$, б) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x+x^2+3}}$, г) $y=e^{\frac{x}{\sqrt{x}+4}}$, е) $y=\sin^3(2x+4)$
2	а) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x}}$, б) $y=3^{x^2+\frac{1}{x^2}}$, в) $y=\log_5^2\left(x^2+\sqrt{x}\right)$, г) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x-1}}$, д) $y=3^{x^2-\frac{1}{x^3}}$, е) $y=6\log_5^3\left(x-\sqrt{x}\right)$,
3	а) $y=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x}}}$, б) $y=e^{x^2+\frac{1}{x\sqrt{x}}}$, в) $y=tg^3x$ г) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x}}$, д) $y=3^{x^2+\frac{1}{x^2}}$, е) $y=\log_5^2\left(x^2+\sqrt{x}\right)$,
4	а) $y=\sqrt[3]{x^2\cdot(1+x)}$, б) $y=e^{x^2+\sin x}$, в) $y=\ln^3\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)$, г) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x}}$, д) $y=7^{x^2+\frac{1}{x^2}}$, е) $y=\log_5^2\left(x^2+4\sqrt{x}\right)$
5	а) $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x\cdot(1+x)}}\right)^{-3}$, б) $y=2^{x+\cos^2 x}$, в) $y=\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, г) $y=\dfrac{4x}{\sqrt{x^2-2x}}$, д) $y=3^{x^2+\frac{1}{x^2}}$, е) $y=\log_7^2\left(7x^2+\sqrt{x}\right)$
6	а) $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x\cdot(1+x)}}\right)^{-3}$, б) $y=2^{x+\cos^2 x}$, в) $y=\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, г) $y=\dfrac{4x}{\sqrt{x^2-2x}}$, д) $y=3^{x^2+\frac{1}{x^2}}$, е) $y=\log_7^2\left(7x^2+\sqrt{x}\right)$
7	а) $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+7x^2}}$, б) $y=e^{x^2+\frac{1}{x}}$, в) $y=\lg^3\left(3x^2+2\right)$, г) $y=2x\cdot\sqrt[3]{x^2+4x}$, д) $y=e^{x^2+\sin x}$, е) $y=\log_7^2\left(x^2+16x\right)$

8	а) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}$, б) $y=3^{x^2+\frac{1}{x^2}}$, в) $y=\log_{\frac{2}{5}}\left(x^2+\sqrt{x}\right)$, г) $y=\sqrt[3]{x\cdot(1+\ln x)}$, д) $y=e^{x^2+\sin x}$, е) $y=\sin^2\left(2x^2+x-1\right)$
9	а) $y=2x\cdot\sqrt[3]{x^2+4x}$, б) $y=e^{x^2+\sin x}$, в) $y=\log_{\frac{2}{7}}\left(x^2+16x\right)$ г) $y=\frac{3x}{\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x}}}$, д) $y=e^{-x+tgx}$, е)$y=\sin^4\left(\sqrt{x}+1\right)$,
10	а) $y=\frac{x-1}{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}$, б) $y=e^{-x^2+tgx}$, в) $y=\cos^3\left(\sqrt{x}+1\right)$, г) $y=\sqrt[3]{x^2\cdot(1+x)}$, д) $y=e^{x^2+\sin x}$, е) $y=\ln^3\left(\frac{x}{2x-1}\right)$

Задание 2. Найдите значения производных y', y'' для данной функции в данной точке

Вариант	функция	точка
1	$y=\frac{x}{x^2+1}$	**1**
2	$y=\frac{x}{x^3-1}$	**1**
3	$y=x\cdot\sin(x^2+1)$	**0**
4	$y=\ln\left(1+x^2\right)$	**-1**
5	$y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$	**-1**
6	$y=x\cdot e^{x^2}$	**1**
7	$y=\arcsin\left(x^2\right)$	**0**
8	$y=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$	**0**
9	$y=\frac{\sqrt{x-1}}{x}$	**1**
10	$\mathbf{y}=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	**1**

Практическая работа №6
Исследование функции с помощью производной
Вариант 1

1) Найти соответствие между функцией и её производной.

1. C	2. $\sqrt{x}$	3. x	4. $-\frac{1}{\sin^2 x}$	5. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	6. $\frac{1}{1+x^2}$
7. e^x	8. $\arcsin x$	9. a^x	10. $\sin x$	11. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	12. $a^x\ln a$

13. x^n	14. tgx	15. $\lg x$	16. $\cos x$	17. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$	18. $\arccos x$
19. **1**	20. $\frac{1}{x\ln 10}$	21. $\frac{1}{x}=x^{-1}$	22. nx^{n-1}	23. $\log_a x$	24. $-\sin x$
25. $arcctgx$	26. $-\frac{1}{1+x^2}$	27. 0	28. $\frac{1}{\cos^2 x}$	29. $arctgx$	30. $\frac{1}{x}$
31. $\cos x$	32. $\ln x$	33. $ctgx$	34. $\frac{1}{x\ln a}$	35. e^x	36. $-\frac{1}{x^2}$

2) Сопоставьте функции её производную.

Функция	**Производная**			
	$\frac{1}{x}$	$2x$	-2 cos$x$sin$x$	cos(x+2)
$x^2 + 1$				
sin(x + 2)				
ln$x$				
cos^2x				

3

Вариант 2

1) Найти соответствие между функцией и её производной.

1. C	2. a^x	3. x	4. $-\frac{1}{\sin^2 x}$	5. e^x	6. $\frac{1}{1+x^2}$
7. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	8. $\arcsin x$	9. $\sqrt{x}$	10. $\sin x$	11. 0	12. $a^x \ln a$
13. x^n	14. tgx	15. $\lg x$	16. $\cos x$	17. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$	18. $\arccos x$
19. **1**	20. $\frac{1}{x\ln 10}$	21. $\frac{1}{x}=x^{-1}$	22. $\frac{1}{x}$	23. $\log_a x$	24. $-\sin x$
25. $arcctgx$	26. $-\frac{1}{1+x^2}$	27. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	28. $\frac{1}{\cos^2 x}$	29. $arctgx$	30. nx^{n-1}
31. $\cos x$	32. $\ln x$	33. $ctgx$	34. $\frac{1}{x\ln a}$	35. e^x	36. $-\frac{1}{x^2}$

2) Сопоставьте функции её производную

Функция	**Производная**			
	$\frac{1}{x\ln 2}$	$5x^4$	2 cos$x$sin$x$	- sin (x - 6)

x^5+1				
$\cos(x-6)$				
$\log_2 x$				
$\sin^2 x$				

Критерии оценки самостоятельной работы

Задания	Баллы	Примечание
1 - 2	22	Каждый правильный ответ 1 балл
3 - 4	10	Каждый правильный ответ 2 балла
5	3	Каждый правильный ответ 3 балла

Максимальный балл за работу **– 35 баллов**

Шкала перевода баллов в отметки

Отметка	**Число баллов, необходимое для получения отметки**
« **5**» (отлично)	35 - 32
« **4**» (хорошо)	31 - 28
« **3**» (удовлетворительно)	27 - 25
« **2** « (неудовлетворительно)	менее 25

Литература

1.Лунгу К.Н., Письменный Д.Т. Сборник задач по высшей математике. - М.: Наука, 2014

2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике. — М.: Высшая школа, 2014г.

3. Валуце И. И., Дилигул Г. Д. Математика для техникумов. — М.: Наука, 1990г.

4. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование. – М. ФОРУМ – ИНФРА – М 2012

Практическое занятие №7
«Нахождение неопределенных интегралов табличным методом и методом подстановки»

Цель: Освоить и закрепить на практических примерах основные свойства неопределённого интеграла и метод непосредственного интегрирования функций.

Теоретические сведения по выполнению практической работы:

Свойства неопределенного интеграла

1. Интеграл суммы равен сумме интегралов:
$$\int \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx .$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:
$$\int a \cdot f(x)dx = a \int f(x)dx .$$

3. Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции: $\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$.

4. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: $d\left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx$

5. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная $\int df(x) = f(x) + C$

Таблица основных неопределённых интегралов

$$1.\int dx = x + C; \qquad 6.\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$2.\int x dx = \frac{x^2}{2} + C; \qquad 7.\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$3.\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C; \qquad 8.\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$4.\int \frac{dx}{x} = \ln x + C; \qquad 9.\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$$

$$5.\int e^x dx = e^x + C; \qquad 10.\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$$

$$11.\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$$

$$12.\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$$

$$13.\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$$

$$14.\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C.$$

Литература:1.Лунгу К.Н., Письменный Д.Т. Сборник задач по высшей математике. - М.: Наука, 2012
2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике. — М.: Высшая школа, 2014г.
3. Валуце И. И., Дилигул Г. Д. Математика для техникумов. — М.: Наука, 1990г.
4. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование. – М. ФОРУМ – ИНФРА – М 2012

Вариант №1

Задание: Найти интегралы, используя таблицу и основные свойства.

1. $\int\left(4\sqrt{x} + \cos x - \frac{5}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$
2. $\int \frac{5x}{x^2}dx$
3. $\int (e^x + 6x - 14x^{-5} + \frac{1}{x})dx$
4. $\int \frac{x^3 + 3x + 1}{x}dx$

Вариант №2

Задание: Найти интегралы, используя таблицу и основные свойства.

1. $\int \cos\frac{t}{2}dt$

2. $\int \frac{x^3+4x}{x}dx$

3. $\int (e^x - \frac{1}{x})dx$

4. $\int \frac{2x^5 - x^4 - x - 1}{7x^2}dx$

Литература: Щипачёв В.С. Гл7 §7.2 №№ 1-5 с. 154

Практическое занятие №8

«Нахождение неопределенных интегралов методом интегрирования по частям.»

Цель: Освоить на практических примерах различные методы интегрирования

Теоретические сведения по выполнению практической работы:

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (то есть подстановки). При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся.Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой. Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int F(x)dx.$$

Сделаем подстановку

$$x = \varphi(t),$$

Где, $\varphi(t)$— функция, имеющая непрерывную производную. Тогда

$$dx = \varphi'(t) \cdot dt$$

и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем формулу интегрирования подстановкой:

$$\int F(x)dx = \int F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Интегрирование по частям. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные первые производные и существует интеграл $\int v(x)\,du(x)$, то существует и интеграл $\int u(x)\,dv(x)$ и имеет место равенство:

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x)\,du(x)$$

или в более короткой форме:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du\,.$$

Обратите внимание, что интегрирование по частям идифференциал произведения являются взаимно обратными операциями (проверьте !).

Вариант №1

Задание №1: Найти интегралы, используя подходящую подстановку.

1. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$
2. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+9}$
3. $\int \sqrt{4x^3+1}x^2 dx$
4. $\int \frac{x dx}{x^2-4}$

Задание №2: Найти интеграл, используя интегрирование по частям.

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$$

Вариант №2

Задание №1: Найти интегралы, используя подходящую подстановку.

1. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^6+7}}$
2. $\int \frac{x dx}{\left(x^2+1\right)^2}$
3. $\int \sqrt[5]{2x-5}\,dx$
4. $\int \sqrt{e^x-5}e^x dx$

Задание №2: Найти интеграл, используя интегрирование по частям.

$$\int 3x^2 \ln x dx$$

Литература: Щипачёв В.С. Гл3 §3.3с 173 №№ 1-5 с.176

Практическая работа №9
«Методы вычисления определенного интеграла»

Цель: рассмотретьвычисление определённых интегралов методом интегрирования по частям и методом замены переменной.

Теоретические сведения.

1. Метод интегрирования по частям.

Метод интегрирования по частям решает очень важную задачу, он позволяет интегрировать некоторые функции, отсутствующие в таблице, **произведение** функций, а в ряде случаев – и **частное**.

Данный метод позволяет свести исходный определенный интеграл к более простому виду либо к табличному интегралу. Этот метод наиболее часто применяется, если подынтегральная функция содержит логарифмические, показательные, обратные тригонометрические, тригонометрические функции, а также их комбинации.

Если функции u= u(x) и v = v(x) имеют непрерывные производные на отрезке [a;b], то имеет место формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$$

Самое сложное, что есть в этом методе – это правильно определить, какую часть подынтегрального выражения брать за u, а какую за dv

Рассмотрим стандартные случаи.

- Для интегралов вида $\int \mathrm{P}(x)e^{ax}dx$, $\int \mathrm{P}(x)\sin(ax)\,dx$ или $\int \mathrm{P}(x)\cos(ax)\,dx$, где $P_n(x)$ - многочлен, a– число. Удобно принять **u=P(x)**, а за **dv** обозначить все остальные сомножители.
- Интегралы вида $\int \mathrm{P}(x)\ln x\,dx$, $\int \mathrm{P}(x)\arcsin x\,dx$, $\int \mathrm{P}(x)\arccos x\,dx$, $\int \mathrm{P}(x)arctgxdx$, $\int \mathrm{P}(x)arcctgxdx$. Удобно принять **P(x)** = **dv**, а за **u** все остальные сомножители.
- Интегралы вида $\int \sin bx\cdot e^{ax}dx$, $\int \cos bx\cdot e^{ax}dx$, где a и b числа. За **u** можно принять функцию **u = e^{ax}**.

Пример 1. Вычислить $\int_1^2 xe^x dx$

Решение.

$$\int_1^2 xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{vmatrix} = xe^x|_1^2 - \int_1^2 e^x dx =$$

$$= 2e^2 - e - e^x|_1^2 = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2.$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^\pi xsinxdx$

Решение.

$$\int_0^\pi xsinxdx = \begin{vmatrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ \sin x\,dx = dv \Rightarrow v = -\cos x \end{vmatrix} = -xcosx|_0^\pi + \int_1^2 \cos x\,dx =$$

$$= -\pi\cdot(-1) + 0 + \sin x|_0^\pi = \pi.$$

2. Интегрирование заменой переменной (подстановкой).

Пусть для интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка x = φ(t).

Если: 1) функция x = φ(t) и ее производная $x' = \varphi'(t)$ непрерывны при t∈[α;β];

2) множеством значений функции x = φ(t) при t∈[α;β] является отрезок [a;b]

3) φ(α) = a иφ(β) = b, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$$

Отметим, что: 1) При вычислении определённого интеграла методом замены переменной возвращаться к старой переменной не требуется;

2) часто вместо подстановки x = φ(t) применяют подстановку t = g(x);

3) не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменных.

Алгоритм вычисления определенного интеграла методом подстановки:

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).
2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.
3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.
4. Находят новые пределы интегрирования.
5. Производят замену под интегралом.
6. Находят полученный интеграл.

Пример 1. Вычислить $\int_4^5 x\sqrt{x^2-16}\,dx$

Решение. Замена: $t = x^2 - 16$; $dt = 2x\,dx$; $dx = \frac{dt}{2x}$.

Найдём новые пределы интегрирования. При $x = 4$, $\alpha = t(4) = 4^2 - 16 = 0$; $x = 5$, $\beta = t(5) = 5^2 - 16 = 9$.

Получаем:

$$\int_4^5 x\sqrt{x^2-16}\,dx = \int_0^6 \frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^6 t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^9 = \frac{1}{3}t\sqrt{t}\Big|_0^9 = \frac{1}{3}\cdot 9\sqrt{9} = 9.$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}$

Решение. Замена: $t = \sqrt{2x+1} + 1$, .

$t - 1 = \sqrt{2x+1}$, $2x + 1 = (t-1)^2$, $x = \frac{(t-1)^2-1}{2} = \frac{t^2-2t}{2}$, $dx = (t-1)dt$.

Найдём новые пределы интегрирования. При $x = 0$, $\alpha = t(0) = 2$; $x = 4$, $\beta = t(4) = 4$.

Получаем:

$$\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1} = \int_2^4 \frac{(t^2-2t)\cdot(t-1)}{2t}dt = \frac{1}{2}\int_2^4 (t-2)(t-1)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^4 (t^2-3t+2)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t\right)\Bigg|_2^4 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{64}{3} - 24 + 8\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - 6 + 4\right) = \frac{7}{3}.$$

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1

1. При помощи формулы интегрирования по частям вычислите интегралы:

а) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x\cos 4x\,dx$; б) $\int_0^1 x\ln(1+x)dx$

2. Вычислите интегралы с помощью замены переменной:

а) $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$; б) $\int_1^2 3x(1-x)^{17}dx$

Вариант 2

1. При помощи формулы интегрирования по частям вычислите интегралы:

а) $\int_0^3 (x-3)e^{-x}dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x^2\sin x\,dx$

2. Вычислите интегралы с помощью замены переменной:

а) $\int_1^9 \frac{xdx}{\sqrt{2x+7}}$; б) $\int_2^3 x(3-x)^7dx$

Контрольные вопросы

1. Что такое определенный интеграл?
2. Какими свойствами обладает определенный интеграл?
3. Что такое формула Ньютона-Лейбница?
4. Как осуществляется замена переменной в определенном интеграле?
5. Как осуществляется интегрирование по частям в определенном интеграле?

Литература.

1. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах: Учебное пособие / Под ред. В.Ф. Бутузова – М.: Физматлит, 2011.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2012.
3. Дадаян А.А. Математика: Учебник для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования. - М.: Форум ; Инфра -М, 2013.-552 с. (411)/(30)

Практическая работа №10
«Решение дифференциальных уравнений»

Цель: рассмотреть решение дифференциальных уравнений первого порядка, выработать практические навыки решения дифференциальных уравнений.

Теоретические сведения

Определение. *Дифференциальным называется уравнение*, связывающее независимую переменную (переменные), неизвестную функцию и ее производные. Если неизвестная функция - это функция одной переменной, то уравнение называется обыкновенным, если нескольких переменных - то уравнением в частных производных.
$F(x, y, y', y'',\ldots, y^{(n)}) = 0$. Порядок уравнения определяется порядком его старшей производной.

Определение. *Решением дифференциального уравнения* называется функция $y = \varphi(x)$ которая, будучи подставленной в уравнение, превращает его в тождество.

Дифференциальные уравнения первого порядка

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка $F(x, y, y') = 0$. Выразим производную:

$$y' = f(x, y). \qquad (*)$$

Дифференциальное уравнение может быть записано через дифференциалы

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0.$$

Определение. Условие равенства $y = y_0$ при $x = x_0$ называется *начальным условием*.

Определение. Общим решением уравнения (*) называется функция

$y = \varphi(x, C)$, зависящая от произвольной постоянной Cи удовлетворяющая условиям:

1. при любом значении C^* функция$y = \varphi(x, C^*)$ является решением (*);
2. для любой точки $M_o(x_o, y_o) \in D$существует значение постоянной$C=C_0$, что $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$.

Общее решение, когда переменная yне выражается через переменную x, называется общим интегралом $\Phi(x, y, C) = 0$.

Определение. *Частным называется решение*, которое получается из общего при конкретном значении постоянной $C=C_0$. Аналогично получается частный интеграл $\Phi(x, y, C_0) = 0$.

Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию, называется задачей Коши.

Замечание. Не любое частное решение может быть получено из общего решения. Если есть такое решение уравнения, то его будем называть особым.

Типы уравнений первого порядка и способы их решений

I. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение с разделяющимися переменными может быть представлено в следующих видах:

$$y' = g(x)\cdot h(y) \qquad (1) \text{ или}$$

$$M_1(x)\cdot M_2(y)\,dx + N_1(x)\cdot N_2(y)\,dy = 0. \qquad (1')$$

Для решения уравнения с разделяющимися переменными необходимо представить производную как отношение дифференциалов и разделить переменные, т.е. с одной стороны от знака равенства собрать выражение содержащее только x, с другой - только y:

$y' = g(x) \cdot h(y)$;
$M_1(x) \cdot M_2(y)\, dx + N_1(x) \cdot N_2(y)\, dy = 0$;

$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$; $\qquad M_1(x) \cdot M_2(y)\, dx = - N_1(x) \cdot N_2(y)\, dy$;

$\frac{dy}{h(y)} = g(x) \cdot dx$; $\qquad \frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx = \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy$;

$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) \cdot dx + C$. $\qquad \int \frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx = \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy$.

Решения записаны с помощью интегралов, полученных при интегрировании уравнения. Эти решения содержат произвольную константу интегрирования и являются общими. А особые решения можно получить, решая алгебраические уравнения $h(y) = 0$; $N_1(x) = 0$; $M_2(y) = 0$.

Пример 1. Решить уравнение $3\, x\ln x \cdot y' = 5y - 4y\ln x$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Действительно, после преобразования получим

$$y' = \frac{5 - 4\ln x}{3x \ln x} \cdot y$$

Интегрируем полученное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5-4\ln x}{3x\ln x} \cdot y$$

Рассмотрим два случая:

1. $y = 0$. Легко убедиться, что данная функция является решением уравнения.
2. $\frac{dy}{y} = \frac{5-4\ln x}{3x\ln x} \cdot dx$; $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{5-4\ln x}{3x\ln x} dx$;

$\ln|x| = \int \frac{5}{3x\ln x} dx - \int \frac{4\ln x}{3x\ln x} dx$; $\qquad \ln|y| = \frac{5}{3}\ln|\ln x| - \frac{4}{3}\ln|x| + \ln|C|$;

$y = C\sqrt[3]{\frac{ln^5 x}{x^4}}$.

Здесь постоянная интегрирования представлена для удобства в виде логарифма, а модули отброшены, т.к. постоянная Cможет принимать и положительные и отрицательные значения. Функция, полученная в случае 2, является общим решением и включает в себя также решение случая 1, получаемое при $C = 0$.

II. Однородные уравнения первого порядка

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется однородной функцией порядка κ, если $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\kappa f(x, y)$.

Определение. Уравнение $y' = f(x, y)$ называется однородным, если $f(x,y)$ является однородной функцией порядка 0. Тогда, принимая $\lambda = 1/x$, получаем

$$y' = f(x, y) = f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = q\left(\frac{y}{x}\right)$$

Таким образом, уравнение первого порядка является однородным, если его правая часть представима в виде функции, зависящей только от отношения переменных x и y

$$y' = q\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (2)$$

Однородное уравнение решается с помощью замены $\frac{y}{x} = t(x)$. При этом $y=tx$, $y' = t'x + 1$. В новых переменных уравнение разрешает разделение переменных:

$$t'x + t = q(t);\ \ x\frac{dt}{dx} = q(t) - t;\ \ \int \frac{dt}{q(t)-t} = \int \frac{dx}{x};\ \ \int \frac{dt}{q(t)-t} = \ln|x| + C$$

Пример 2. Найти частное решение уравнения $x \cdot y' = 5xe^{\frac{2y}{x}} - 4 + y$; y(1) = 0.

Решение. Покажем, что это уравнение однородное. Выразим производную

$$y' = 5xe^{\frac{2y}{x}} - 4 + \frac{y}{x}$$

Правая часть уравнения зависит только от отношения переменных yи x, следовательно, уравнение - однородное. Введя замену$\frac{y}{x} = t(x)$, получим

$$x \cdot t' + t = 5e^{2t} - 4 + t;\ t' = \frac{5e^{2t} - 4}{x};\ \frac{dt}{5e^{2t} - 4} = \frac{dx}{x};\ \int \frac{dt}{5e^{2t} - 4} = \int \frac{dx}{x}$$

Вычислим интеграл слева:

$$\int \frac{dt}{5e^{2t} - 4} = \int \frac{e^{2t}dt}{5(e^{2t})^2 - 4e^{2t}} = \frac{1}{10}\int \frac{de^{2t}}{(e^{2t})^2 - 2e^{2t}\frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{25}} =$$

$$= \frac{1}{10}\int \frac{d(e^{2t} - 2/5)}{(e^{2t} - 2/5)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{1}{10}\frac{1}{2 \cdot 2/5}\ln\left|\frac{e^{2t} - 7/5}{e^{2t} + 3/5}\right| = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{e^{2t} - 7/5}{e^{2t} + 3/5}\right|$$

Общий интеграл уравнения может быть записан в следующем виде:

$$\frac{1}{8}\ln\left|\frac{e^{2y/x} - 7/5}{e^{2y/x} + 3/5}\right| = \ln|x| + \frac{1}{8}\ln|C|;\ \ \frac{e^{2y/x} - 7/5}{e^{2y/x} + 3/5} = Cx^8$$

Подставим в полученное решение в начальное $\frac{1-7/5}{1+3/5} = C$; $\mathrm{C} = \frac{2}{7}$

Таким образом, получим частный интеграл уравнения $\frac{e^{2y/x} - 7/5}{e^{2y/x} + 3/5} = \frac{2}{7}x^8$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. Решить уравнения с разделяющимися переменными

Вариант 1

1) $y' = 2e^{3x} - 4x^2 + 6.\ y(0) = 2$
2) $2x(2+y)\,dy = (x^2-7)(y-9)\,dx$

Вариант 2

1) $y' = 4e^{2x} - 2x^2 + 3.\ y(1) = 3$
2) $(4xy^2 - xy)\,dx = (xy+x+y+1)\,dy$

Задание 2. Решите однородное уравнение первого порядка

Вариант 1

1) $x5y - 7x.\ y(1) = 2$
2) 11y $y' = 3x + y$

Вариант 2

1) $3xy' = 2e + 9x.\ y(2) = 1$
2) $y\,y' = = x-y$

Контрольные вопросы

1. Что называется дифференциальным уравнением 1-го порядка?
2. Написать общий вид дифференциального уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.
3. Каков общий вид однородного дифференциального уравнения 1-го порядка?
4. Какая замена неизвестной функции позволяет свести однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка к уравнению с разделяющимисяперемнными?

Литература.

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.2. – М.: Интеграл-Пресс, 2014. – 544 с.
2. Демидович Б.П. (ред.). Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов. – М.: АСТ, 2012. – 496 с.
3. Зайцев В.Ф., А.Д. Полянин. Спрвавочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

Практическое занятие №11
Решение дифференциальных уравнений первого порядка»

Цель: Освоить решение однородных дифференциальных уравнений первого порядка

Вариант №1

Задание №1 Найдите общее и частное решение дифференциального уравнения

1. $x^3 y dx = y^2 x dy,$ при y=2, x=3
2. $(x+3)ydy - 3(y-3)xdx = 0$,при y=1, x=1
3. $(y-1)dx - (x-1)dy = 0$ при y=1 x=1
4. $2(x^2-4)ydy + (y^2-4)xdx = 0$ при y=1 x=1
5. $\frac{dx}{\sqrt{x}} - \frac{xdy}{\sqrt[3]{y}} = 0$ при y=1 x=1

Вариант №2

Задание №1 Найдите общее и частное решение дифференциального уравнения

1. $x^2 y dx = y^3 x dy,$ при y=2, x=2
2. $(x+1)ydy + 3(y-3)xdx = 0$,при y=1, x=1
3. $ydx - xy^2 dy = 0$ при y=1 x=2
4. $(x^2-1)ydy + (y^2+1)xdx = 0$ при y=2 x=2
5. $\frac{y^3 dx}{\sqrt{x}} + \frac{x^2 dy}{\sqrt[3]{y}} = 0$ при y=1 x=1

Задание №2 Ответить на контрольные вопросы

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Какое решение дифф. уравнения называется частным, какое общим?
3. В чём состоит суть метода разделяющихся переменных?
4. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением первого порядка? Приведите пример
5. Какое дифференциальное уравнение называется однородным дифференциальным? Приведите пример
6. Запишите чему равно частное решение в первых 3 примерах.

Литература:Баврин И.И. «Высшая математика»ГЛ 8 §8.1 Упр. №№6-12 стр. 428
ГЛ 9§9.1 с 431 Упр.№36-42№1-8
Подольский В.А., Суходольский А.МСборник задач по высшей математике с.196 №№11.26-11.31

Практическое занятие №12
«Применение основных теорем при решении задач »

При решении ряда теоритических и практических задач требуется из конечного множества элементов по заданным правилам составлять различные комбинации и производить подсчет числа всех возможных таких комбинаций. Такие задачи принято называть *комбинаторными,* а раздел математики, занимающийся их решением, называется *комбинаторикой*.

Комбинаторика широко применяется в теории вероятностей, теории массового обслуживания, теории управляющих систем и вычислительных машин и других разделах науки и техники.

1. **Размещения.**

Определение 1. Пусть дано множество, состоящее из n элементов. *Размещением* из n элементов по m $(0 \leq m \leq n)$*элементов* называется упорядоченное подмножество, содержащее m различных элементов данного множества.

Из определения вытекает, что размещения из n элементов по m – это все -элементные подмножества, отличающиеся составом элементов или порядком их следования.

Число всех возможных размещений изn элементов по m элементов обозначают [1]) A_n^m и вычисляют по формуле

$$A_n^m = n\,(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1). \qquad (1)$$

Докажем формулу (1).

□ Так как в качестве первого элемента может быть выбран любой из данных n элементов, то первый элемент можно выбрать n различными способами. Очевидно, что в качестве второго элемента можно выбрать любой из оставшихся n-1 элементов, поэтому можно выбрать n-1 различными способами. Так как каждый из способов выбора первого элемента можно объединить с каждым из способов выбора второго элемента, то существуют n(n-1) различных способов выбора первых двух элементов. Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что существуют $n(n-1)(n-2)$ различных способов выбора первых трех элементов и т. д. Наконец, существует

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$$

способов выбора m различных элементов, т.е. имеет место равенство (1).

Умножив и разделив часть равенства (1) на произведение 1*2*3 …(n-m), получим

$$A_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)(n-m)\ldots3*2*1}{1*2*3\ldots(n-m)},$$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (2)$$

Здесь $n! = 1*2*3\ldots(n-1)*n$ (читается «эн факториал») и $(n-m) = 1*2*3\ldots(n-mk-1)(n-m)$(читается «эн минус эм факториал»). Условимся считать 0!=1, поэтому $A_0^0 = \frac{0!}{0!} = 1$.

Пример 1. В группе из 30 учащихся нужно выбрать комсорга, профорга и физорга. Сколькими способами это можно сделать, если каждый из 30 учащихся комсомолец, член профсоюза и спортсмен?

△Искомое число способов равно числу размещений из 30 элементов по 3 элемента, т.е. A_{30}^3. Положив в формуле (1) $n = 30, m = 3$, получаем $A_{30}^3 = 30*29*28 = 24360$.

2. **Перестановки.**

Определение 2. *Перестановкой из* n *элементов* называется размещение из n элементов по n элементов.

Так как каждая перестановка содержит все n элементов множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов.

Число всех возможных перестановок из n элементов обозначают P_n. Из определения перестановок следует

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!,$$

$$P_n = n! \qquad (3)$$

Пример 2. Сколькими способами можно расставлять на одной полке шесть различных книг? Искомое число способов равно числу перестановок из 6 элементов, т.е.

$$P_6 = 6! = 1*2*3*4*5*6 = 720$$

3. **Сочетания.**

Определение 3. Пусть дано множество, состоящее из n элементов. Сочетанием из n элементов по m ($0 \le m \le n$) *элементов* называется любое подмножество, которое содержит m различных элементов данного множества.

Следовательно, сочетания из n элементов по m – это все m- элементные подмножества n – элементарного множества, причем различными подмножества считаются только те, которые имеют неодинаковый состав элементов. Подмножества, отличающиеся друг от друга лишь порядком следования элементов, не считаются различными.

Число всех возможных сочетаний из n элементов по m элементов обозначают C_n^m и вычисляют по формуле

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n*(n-1)*(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}, \qquad (4)$$

Докажем формулу (4).

Число A_n^m размещений из n элементов поm найдем следующим образом. Сначала составим все возможные подмножества, содержащие поm различных элементов. Их число равно C_n^m. Затем в каждом из полученных таким образом подмножеств (сочетаний) сделаем все перестановки, в результате получим все размещения из n элементов по m. Так как число перестановок из m элементов равно $m!$, то число A_n^m размещений из n элементов по m элементов равно $m!$ раз больше, чем число C_n^m сочетаний из n элементов по m, т.е.

$$A_n^m = m!\ C_n^m = P_m C_n^m$$

Отсюда

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}$$

Так как $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$, то

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (5)$$

ЧислоC_n^m сочетаний из n элементов по m определяют по одной из формул (4) или (5).

Пример 3. В бригаде из 25 человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

Так как порядок выбранных четырех человек не имеет значения, то это можно сделатьC_{25}^4 способами. По формуле (4) находим

$$C_{25}^4 = \frac{25*24*23*22}{1*2*3*4} = 12650$$

Докажем, что$C_n^m = C_n^{m-n}$.

Заменив в равенстве(5) mна$n-m$, получим $C_n^{m-n} = \frac{n!}{(n-m)!(n(n-m))!} = C_n^m$. (6)

Формула (6) заметно упрощает вычисление числа C_n^m в тех случаях, когда $m > n/2$; например,

$$C_{20}^{18} = C_{20}^2 = \frac{20*19}{1*2} = 190.$$

Вариант 1

1. Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов - первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора Иванова окажется запланированным на последний день конференции?
2. В случайном эксперименте бросают 2 игральные кости. Найти вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Ответ округлите до сотых.
3. В кармане у Андрея было 4 монеты по 2 рубля и 2 монеты по 5 рублей. Он, не глядя, переложил 3 монеты в другой карман. Найти вероятность того, что обе монеты по 5 рублей лежат в одном кармане.

Вариант 2

1. В соревнованиях по плаванию участвуют 4 спортсмена из России, 7 спортсменов из Италии, 9 спортсменов из Финляндии и 5 - из Швейцарии. Порядок, в котором выступают спортсмены,

определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий последним, окажется из Швейцарии.

2. В случайном эксперименте бросают 2 игральные кости. Найти вероятность того, что в сумме выпадет 6 очков. Ответ округлите до сотых.
3. В кармане у Марины было 6 монет по 1 рублю и 2 монеты по 5 рублей. Она, не глядя, переложила 4 монеты в другой карман. Найти вероятность того, что обе монеты по 5 рублей лежат в одном кармане. Ответ округлите до сотых.

Вариант 3

1. Конкурс исполнителей проводится 3 дня. Всего заявлено 80 выступлений – по одному от каждой страны. В первый день пройдёт 20 выступлений. А остальные распределены поровну между оставшимися днями. Какова вероятность того, что выступление представителя России состоится в третий день?
2. Игральный кубик бросили один раз. Какова вероятность того, что выпадет не менее 4 очков?
3. В кармане у Юлии было 4 монеты по 1 рублю и 2 монеты по 2 рубля. Она, не глядя, переложила 3 монеты в другой карман. Найти вероятность того, что обе монеты по 2 рубля лежат в одном кармане.

Вариант 4

1. Конкурс исполнителей проводится 3 дня. Всего заявлено 60 выступлений – по одному от каждой страны. В первый день пройдёт 30 выступлений. А остальные распределены поровну между оставшимися днями. Какова вероятность того, что выступление представителя Франции состоится в третий день?
2. Игральный кубик бросили один раз. Какова вероятность того, что выпадет более 3 очков?
3. В кармане у Ивана было 6 монет по 2 рубля и 2 монеты по 5 рублей. Он, не глядя, переложил 4 монеты в другой карман. Найти вероятность того, что обе монеты по 5 рублей лежат в одном кармане. Ответ округлите до сотых.