Департамент внутренней и кадровой политики Белгородской области
Областное государственное автономное профессиональное образовательное учреждение
«Белгородский индустриальный колледж»

Рассмотрено
Цикловой комиссией
«Информатики и ПОВТ»
Протокол заседания № 8
от «13» января 2021 г.
Председатель цикловой комиссии
________________/Третьяк И.Ю.

КОМПЛЕКС УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ РЕКОМЕНДАЦИЙ

для выполнения практических работ
по дисциплине

ЕН.01 «МАТЕМАТИКА»

по специальности
13.02.11 «Техническая эксплуатация и обслуживание электрического и электромеханического оборудования (по отраслям)»

Разработчик преподаватель:
Белянская Екатерина Ивановна,
ОГАПОУ «Белгородский
индустриальный колледж

Белгород, 2021

Содержание

Пояснительная записка

Данная работа содержит методические указания и задания к практическим занятиям по дисциплине ЕН.01 «Математика»» и предназначена для обучающихся по специальности 13.02.11 «Техническая эксплуатация и обслуживание электрического и электромеханического оборудования»

Цель разработки: оказание помощи учащимся в выполнении практических занятий по дисциплине ЕН.01 «Математика».

Введение практических занятий в учебный процесс служит связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, а также для получения практических навыков и умений. На практическом занятии задания, выполняются студентом самостоятельно, с применением знаний и умений, усвоенных на предыдущих уроках, а также с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя. К практическому занятию от студента требуется предварительная подготовка, которую он должен провести перед занятием. Подготовка включает в себя как повторение теоретических вопросов, так и отработка, и решение наиболее важных задач и упражнений, касающихся непосредственно изучаемой темы.

Задания для практических занятий разработаны в соответствии с учебной программой. В зависимости от уровня подготовки студента, возможен дифференцированный подход, при выполнении практической работы. Оценку по каждой контрольной работе студент получает после её выполнения и предоставления в специальной тетради для практических работ.

Раздел 1. Элементы линейной алгебры

Практическое занятие №1. Операции над матрицами

Цель: научиться выполнять действия с матрицами: умножение матриц, нахождение линейных комбинаций матриц, транспонирование матриц.

Теоретическая часть.

1. Действия с матрицами.

Суммой двух матриц А и В одинакового размера называется матрица С тех же размеров, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц А и В.

Пример:

Пусть $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда $C = A + B =$ $\begin{pmatrix} 1+4 & 2+6 & 3+1 \\ 5+3 & -1+3 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Сложение матриц обладает свойствами:

1. А+В=В+А – коммутативность сложения;

2. (А+В)+С=А+(В+С) – ассоциативность сложения;

3. Для любой матрица А найдется единственная матрица В такая, что А+В=0

Произведением матрицы А на действительное число α называется матрица В, элементы которой получаются из соответствующих элементов матрицы А умножением их на число α. В= αА

Пример:

Пусть $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\alpha = -2.$ Тогда $- 2 * \mathrm{A} =$ $\begin{pmatrix} -2*1 & -2*2 & -2*3 \\ -2*5 & -2*-1 & -2*0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -10 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

При умножении матрицы А на (-1) получается матрица, которая в сумме с матрицей А дает нулевую матрицу.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – нулевая матрица размеров 2х3

Умножение матрицы на число и операция сложения матриц при совместном применении обладают следующими свойствами:

1. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

2. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$

Произведением двух матриц А и В называется матрица С, имеющая столько же строк, сколько их имеет матрица А, и столько же столбцов, сколько их имеет матрица В.

Операция нахождения произведения матриц А и В называется умножением матриц, и его результат записывается так: С=АВ

Замечание. Две матрицы можно перемножить между собой тогда и только тогда, когда количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы.

Пример:

Пусть $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда $\mathrm{C} = \mathrm{AB} =$

$$\begin{pmatrix} 1*2+2*0+3*1 & 1*2+2*5+3*4 \\ 5*2-1*0+0*1 & 5*1-1*5+0*4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 24 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Свойства операции умножения матриц:

1. $\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$

2. $\mathrm{A(B+C)} = \mathrm{AB} + \mathrm{AC}$

3. $\mathrm{(AB)C} = \mathrm{A(BC)}$

4. $\mathrm{E}_m A = A$

2. Миноры и алгебраические дополнения.

Минор, соответствующий элементу определителя матрицы n-го порядка, называется определитель матрицы n-1 порядка, который получен путем вычеркивания из определителя n-го порядка строки и столбца, к которому относится данный элемент.

$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$ $M_{11} = \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$ и так далее.

Алгебраическое дополнение: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$ – присоединенная матрица.

Величина определителя равна сумме произведению элементов какой-либо строки (столбца) умноженного на соответствующее алгебраическое дополнение.

3. Обратная матрица.

Для квадратной матрицы А матрица A^{-1} называется обратной, если выполняется равенство: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$

Если определитель матрицы равен нулю, то матрица называется вырожденной.

Если определитель матрицы не равен нулю, то она называется невырожденной.

Теорема. Для любой невырожденной матрицы существует обратная матрица причем единственная. Для вырожденной матрицы обратной матрицы не существует.

Схема вычисления обратной матрицы:

1. Вычисляем определитель матрицы. ($|A| \neq 0$, если да, то вычисляем обратную матрицу, иначе обратной матрицы не существует);

2. Определяем транспонированную матрицу. A^T

3. Вычисляем присоединённую матрицу. A^*

4. $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$

5. Делаем проверку: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$

Практическая часть.

1. Выполнить арифметические действия с матрицами:

a. 3A+5B, A-4B

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

b. A+4B, -3A-2B

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -7 \\ 8 & -12 & 3,5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -37 & -81 \\ 4 & 5.5 & -7 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

2. Выполните произведение матриц АВ, ВА

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & 6 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3. Вычислить обратную матрицу.

a. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

c. $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

d. $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Контрольные вопросы:

1. Опишите схему вычисления обратной матрицы
2. Какие матрицы можно перемножать между собой?

Практическое занятие №2. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера. Метод Гаусса.

Цель: научиться решать системы уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса и методом Крамера

Теоретическая часть.

Элементарные преобразования матрицы – это такие преобразования матрицы, в результате которых сохраняется эквивалентность матриц, то есть, элементарные преобразования не изменяют множество решений системы линейных алгебраических уравнений, которую представляет эта матрица.

Существует два элементарных преобразования строк матрицы:

1. Перемена местами двух строк;
2. Умножение на ненулевую константу любой строки матрицы;
3. К каждой строке можно прибавить другую строку, умноженную на число.

Определение. Матрицы А и В называют эквивалентными матрицами если от матрицы А к матрице В перешли с помощью элементарных преобразований над строками и обозначают А ~ В.

Матрица ступенчатого вида – это матрица, удовлетворяющая условиям:

1. За 0 может следовать 0 (в столбцах);

2. Для любых двух соседних строк ненулевой элемент нижней строки располагается правее ненулевого элемента верхней строки.

Пример 1. Используя элементарные преобразования строк преобразовать матрицу А в матрицу ступенчатого вида, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Решение:

1. Поменяем первую и вторую строку местами

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

2. Ко 2-рой строке прибавим 1-вую, умноженную на -4;

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 + (-4) * 1 & 2 + (-4) * 3 & 0 + (-4) + 2 \\ -1 & 3 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -10 & -8 \\ -1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

3. К третей строке прибавим первую

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -10 & -8 \\ -1+1 & 3+3 & 10+2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -10 & -8 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

4. 2-рую строку умножим на -1/2, третью строку умножим на 1/6

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0*(-\frac{1}{2}) & -10*(-\frac{1}{2}) & -8*(-\frac{1}{2}) \\ 0*\frac{1}{6} & 6*\frac{1}{6} & 12*\frac{1}{6} \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Поменяем вторую и третью строку местами

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

6. К 3-тей строке прибавим 2-рую, умноженную на -5

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0+0*(-5) & 5+1*(-5) & 4+2*(-5) \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

3. Схема решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\dots+\alpha_{1n}x_n=\beta_1 \\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\dots+\alpha_{2n}x_n=\beta_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{m1}x_1+\alpha_{m2}x_2+\dots+\alpha_{mn}x_n=\beta_m \end{cases}$$

Где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – неизвестные переменные; $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ – свободные члены.

Если $\beta_1=\beta_2=\dots=\beta_m=0$, то СЛАУ называется однородной, в противном случае неоднородной.

Определение. Две системы линейных уравнений называются эквивалентными, если все решения первой системы являются решением второй и наоборот.

Определение. Две матрицы называются эквивалентными, если от одной матрицы можно перейти к другой с помощью конечного числа элементарных образований.

Теорема. Если от одной матрицы можно перейти к другой с помощью коечного числа элементарных преобразований, то и от второй матрицы можно перейти к первой с помощью конечного числа элементарных преобразований.

$\overline{\mathrm{A}}$ – расширенная матрица системных уравнений.

$$\overline{\mathrm{A}} = \left(\begin{matrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{matrix}\left|\begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{matrix}\right.\right)$$

Теорема. Если расширенные матрицы двух системных линейных уравнений эквивалентны, то и сами системы линейных уравнений будут эквивалентны.

Определение. Решением СЛУ называется набор чисел, которые при подстановке вместо независимых должны давать верное равенство.

Порядок решения СЛАУ:

1. Выписываем расширенную матрицу этой системы и приводим её к ступенчатому виду.

2. Выписываем номера столбцов, в которых располагаются первые ненулевые числа строк ступенчатой матрицы и неизвестные с этими номерами назовем зависимыми, остальные неизвестные назовем свободные

3. Составим систему линейных уравнений из расширенной матрицы.

4. Переносим слагаемые содержащие свободные неизвестные вправо.

5. Двигаясь снизу-вверх по системе выразим зависимые неизвестные через свободные. Это общее решение системы уравнений.

Для того чтобы получить частное решение нужно придать значение свободным неизвестным, подставить их в общее решение и вычислить левые часть

Практическая часть.

1. Решить системы уравнений методом Крамера и методом Гаусса:

Вариант 1

$$\begin{cases} 5x-3y+4z=11 \\ 2x-y-2z=-6 \\ 3x-2y+z=2 \end{cases}$$

Вариант 2

$$\begin{cases} 2x+4y+z=1 \\ 3x+6y-2z=-2 \\ 2x+2y-z=-2 \end{cases}$$

Вариант 3

$$\begin{cases} 5x+y-3z=-2 \\ 4x+3y+2z=16 \\ 2x-3y+z=17 \end{cases}$$

Контрольные вопросы:

1. Чем отличается решение СЛАУ методом Крамера от Гаусса?

Практическое занятие №3. Решение систем линейных уравнений

Цель: научиться решать системы уравнений с тремя неизвестными методом.

Теоретическая часть.

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a1x + b1y + c1z = d1 \\ a2x + b2y + c2z = d2 \\ a3x + b3y + c3z = d3 \end{cases} \qquad (1)$$

Систему 1 записывают короче:

$a_ix + b_iy + c_iz = d_i$,   где $i = 1,2,3$

Здесь a_i, b_i, c_i, d_i- некоторые заданные числа, а x, y, z - искомые неизвестные. Как известно, тройка чисел (x_0; y_0; z_0) называется решением системы 1, если при подстановке их в уравнения системы вместо x, y, z получаются верные числовые равенства.

Рассмотрим сначала случай, когда все коэффициенты уравнения системы 1 равны нулю: $a_i = b_i= c_i = 0$, $i = 1,2,3$.

В этом случае, если все свободные члены уравнений системы равны нулю: $d_1 = d_2 = d_3 = 0$, то, очевидно любая тройка чисел $(x; y; z)$ является решением этой системы. Если же не все свободные члены уравнений равны нулю, то система не имеет решений.

Рассмотрим теперь случай, когда не все коэффициенты уравнений системы 1 равны нулю. Пусть, например, $c_3 = 0$, тогда данная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ \frac{a_3}{c_3}x + \frac{b_3}{c_3}y + z = \frac{d_3}{c_3}. \end{cases}$$

Последнее уравнение этой системы умножим на c_1 и вычтем почленно из первого уравнения, в результате получим уравнение:

$$(a_1 - \frac{a_3}{c_3}c_1)\, x + (b_1 - \frac{b_3}{c_3}c_1)\, y = d_1 - \frac{d_3}{c_3}c_1 \qquad (2)$$

Аналогично, умножая последнее уравнение на c_2 и вычитая почленно из второго уравнения, получаем:

$$(a_2 - \frac{a_3}{c_3}c_2)\, x + (b_2 - \frac{b_3}{c_3}c_2)\, y = d_2 - \frac{d_3}{c_3}c_2 \qquad (3)$$

Очевидно, что система

$$\begin{cases} (a_1c_3 - a_3c_1)\, x + (b_1c_3 - b_3c_1)\, y = d_1c_3 - d_3c_1, \\ (a_2c_3 - a_3c_2)\, x + (b_2c_3 - b_3c_2)\, y = d_2c_3 - d_3c_2, \\ \frac{a_3}{c_3}x + \frac{b_3}{c_3}y + z = \frac{d_3}{c_3}. \end{cases} \qquad (4)$$

у которой первое уравнение получается из второго, второе - умножением на c_3, эквивалентна системе 1.

Таким образом, если $c_3 \neq 0$, то исследование системы 1 сводится к исследованию системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} (a_1c_3 - a_3c_1)\, x + (b_1c_3 - b_3c_1)\, y = d_1c_3 - d_3c_1, \\ (a_2c_3 - a_3c_2)\, x + (b_2c_3 - b_3c_2)\, y = d_2c_3 - d_3c_2. \end{cases} \qquad (5)$$

Рассмотрим сначала случай, когда все коэффициенты уравнений системы 5 равны нулю. Тогда, если свободные члены системы 5 равны нулю, то любая пара чисел является решением системы 5 и, следовательно, любая тройка чисел (x; y; z), где $x \in R$, $y \in R$, $z = \frac{d_3}{c_3} - \frac{a_3}{c_3}x - \frac{b_3}{c_3}y$,

является решением системы 1. Если же хотя бы у одного из уравнений системы 5 свободный член отличен от нуля, то система 5, а следовательно, и система 1 не имеют решений.

Рассмотрим случай, когда не все коэффициенты уравнений системы 5 равны нулю.

Пусть, например, $b_2c_3 - b_3c_2 \neq 0$.

Первое уравнение системы 5 умножим на $b_2c_3 - b_3c_2$, второе - на $(b_1c_3 - b_3c_1)$ и сложим; после очевидных преобразований получим уравнение $\Delta \cdot x = \Delta x$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Таким образом, если $b_2c_3 - b_3c_2 \neq 0$, то система 5 эквивалентна системе:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta x \\ \frac{a_2c_3 - a_3c_2}{b_2c_3 - b_3c_2}x + y = \frac{d_2c_3 - d_3c_2}{b_2c_3 - b_3c_2}. \end{cases}$$

Если $\Delta = \Delta_x = 0$, то, очевидно, любая пара чисел (x; y), где $x \in R$,

$$y = \frac{d_2c_3 - d_3c_2}{b_2c_3 - b_3c_2} - \frac{a_2c_3 - a_3c_2}{b_2c_3 - b_3c_2}x, \qquad (6)$$

является решением системы 5.

Из 6 и последнего уравнения системы 4 находим

$$z = \frac{b_2d_3 - b_3d_2}{b_2c_3 - b_3c_2} - \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{b_2c_3 - b_3c_2}x, \qquad (7)$$

Следовательно, если $\Delta = \Delta_x = 0$ и $b_2c_3 - b_3c_2 \neq 0$, то любая тройка чисел (x; y; z), где $x \in R$, а y и z находятся по формулам 6 и 7, являются решением системы 1.

Если $\Delta = 0$, а $\Delta_x \neq 0$, то система 5, а следовательно, и система 1 не имеют решений.

Пусть теперь $\Delta \neq 0$. Тогда $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$. Подставив это значение x во второе уравнение системы 5, найдем: $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$,

где $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$

Наконец, подставив полученные значения x и y в третье уравнение системы 4, получим $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$,

где $\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

Следовательно, если $\Delta \neq 0$, то система 1 имеет единственное решение, которое находится по формулам $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$. (8)

Эти формулы называются формулами Крамера. Если определитель линейной системы не равен нулю, то система имеет единственное решение;

если же определитель системы равен нулю, то она или не имеет решений, или имеет бесконечное множество решений.

Определители Δ_x, Δ_y, Δ_z, входящие в формулы Крамера, получаются из определителя заменой столбца из коэффициентов при соответствующих неизвестных на столбец из свободных членов.

Метод исследования и решения системы 1, который только что рассмотрен, называется методом исключения неизвестных или методом Гаусса.

При условии $c_3 \neq 0$ из третьего уравнения системы 1 неизвестное выражается через x и y и это значение для z подставляется в первое и второе уравнения. В результате получается система двух уравнений с двумя неизвестными. В этом случае говорят, что система трех уравнений с тремя неизвестными исключением неизвестного z сводится к системе двух уравнений с двумя неизвестными. Заметим, что вместо z можно исключить любое неизвестное и что исключаемое неизвестное можно находить из любого уравнения, в которое оно входит.

Пример 1: Решить систему:

$$\begin{cases} x=3, \\ 2x+y=8, \\ 4x-2y-z=3. \end{cases}$$

Решение: подставив x=3 во второе уравнение системы, получим:

$$y=8-2x=8-2\times 3=2.$$

Подставив в третье уравнение системы x=3, y=2, получим: $z=4x-2y-3=4\times 3-2\times 2-3=5$.

Ответ: x=3, y=2, z=5.

Практическая часть.

Решить систему уравнений методом Гаусса и методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x-2y+z=10 \\ x+5y-2z=-15 \\ 2x-2y-z=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x+3y+3z=48 \\ 2x+6y-3z=18 \\ 8x-3y+2z=21 \end{cases}$$

Раздел 2. Основы теории комплексных чисел

Практическое занятие №4. Действия над комплексными числами.

Цель: научиться выполнять арифметические операции над комплексными числами

Теоретическая часть.

Комплексные числа записываются в виде: $z=a+bi$. Здесь a и b – действительные числа, а i – мнимая единица, т.е. $i^2 = -1$. Число а называется абсциссой, b – ординатой комплексного числа $a+bi$.

Два комплексных числа $a+bi$ и $a - bi$ называются сопряжёнными комплексными числами.

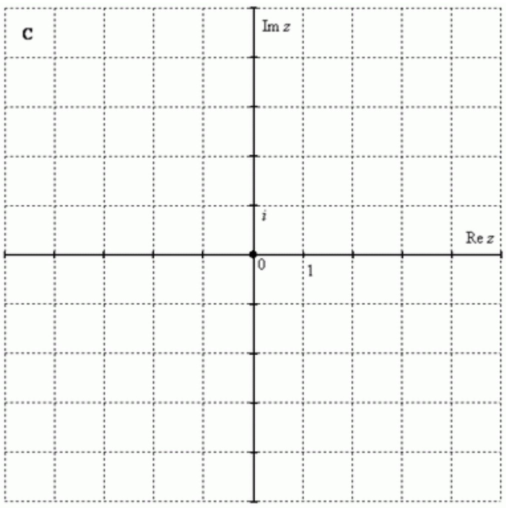
Основные договорённости:

1. Действительное число a может быть также записано в форме комплексного числа: $a+0i$ или $a–0i$. Например, записи $5+0i$ и $5–0i$ означают одно и то же число 5.

2. Комплексное число $0+bi$ называется чисто мнимым числом. Запись bi означает то же самое, что и $0+bi$.

3. Два комплексных числа $a+bi$ и $c+di$ считаются равными, если $a=c$ и $b=d$. В противном случае комплексные числа не равны.

Приведем геометрическую интерпретацию. Комплексные числа изображаются на *комплексной плоскости*:



Буквой **R** принято обозначать множество действительных чисел. **Множество** же **комплексных чисел** принято обозначать «жирной» буквой **C**. Поэтому на чертеже следует поставить букву **C**, обозначая тот факт, что у нас комплексная плоскость.

Комплексная плоскость состоит из двух осей:

Re z – действительная ось

Im z – мнимая ось

Правила оформления чертежа практически такие же, как и для чертежа в декартовой системе координат. По осям нужно задать масштаб, отмечаем:

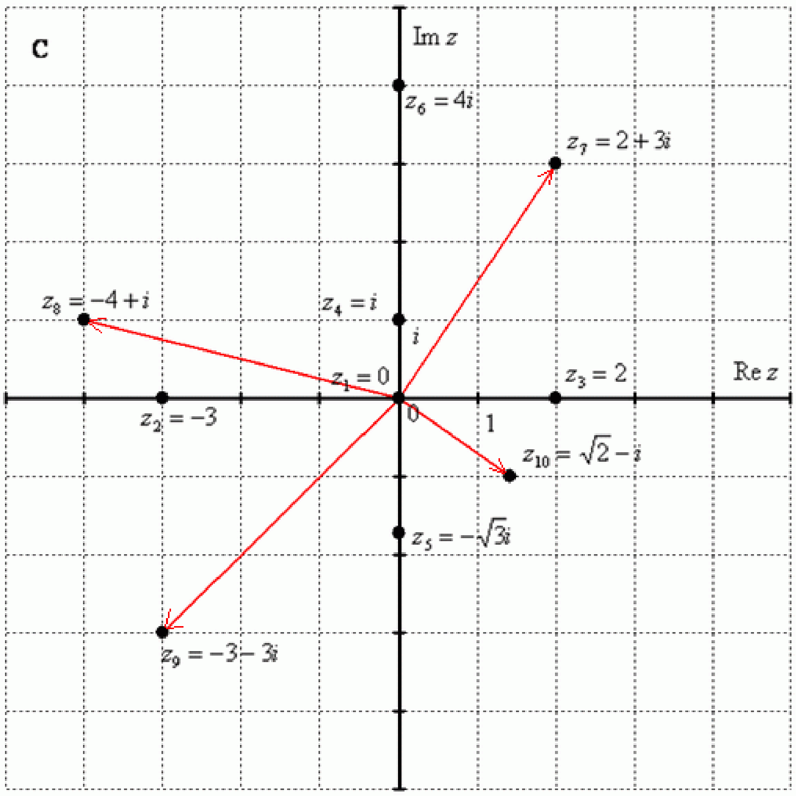
- ноль;
- единицу по действительной оси;
- мнимую единицу *i* по мнимой оси.

Построим на комплексной плоскости следующие комплексные числа:

$z_1 = 0$, $z_2 = -3$, $z_3 = 2$

$z_4 = i$, $z_5 = -\sqrt{3}i$, $z_6 = 4i$

$z_7 = 2 + 3i$, $z_8 = -4 + i$, $z_9 = -3 - 3i$, $z_{10} = \sqrt{2} - i$



Арифметические действия над комплексными числами:

Сложение. Суммой комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ называется комплексное число $(a+c)+(b+d)i$. Таким образом, при сложении комплексных чисел отдельно складываются их абсциссы и ординаты.

Пример 1

Сложить два комплексных числа: $z_1 = 1 + 3i,\ z_2 = 4 - 5i$

Для того чтобы сложить два комплексных числа нужно сложить их действительные и мнимые части: $z_1 + z_2 = 1 + 3i + 4 - 5i = 5 - 2i$

Для комплексных чисел справедливо правило – от перестановки слагаемых сумма не меняется.

Вычитание. Разностью двух комплексных чисел $a+bi$ (уменьшаемое) и $c+di$ (вычитаемое) называется комплексное число $(a–c)+(b–d)i$.

Таким образом, при вычитании двух комплексных чисел отдельно вычитаются их абсциссы и ординаты.

Пример 2

Найти разности комплексных чисел $z_1 - z_2$ и $z_2 - z_1$, если $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 4 - 5i$

$z_1 - z_2 = (1 - 4) + \big(3 - (-5)\big)i = -3 + 8i$

$z_2 - z_1 = (4 - 1) + (-5 - 3)i = 3 - 8i$

Умножение. Произведением комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ называется комплексное число: $(ac–bd)+(ad+bc)i$. Это определение вытекает из двух требований:

1) числа $a+bi$ и $c+di$ должны перемножаться, как алгебраические двучлены,

2) число i обладает основным свойством: $i^2=–1$.

Пример 3

Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 1 - i, z_2 = 3 + 6i$.

Очевидно, что произведение следует записать так:

$z_1 \cdot z_2 = (1 - i)(3 + 6i)$

$z_1 \cdot z_2 = (1-i)(3+6i) = 1 \cdot 3 - i \cdot 3 + 1 \cdot 6i - i \cdot 6i = 3 - 3i + 6i + 6 = 9 + 3i$

Деление. Разделить комплексное число $a+bi$ (делимое) на другое $c+di$ (делитель) – значит найти третье число $e+fi$ (чатное), которое будучи умноженным на делитель $c+di$, даёт в результате делимое $a+bi$.

Если делитель не равен нулю, деление всегда возможно.

Пример 4

Даны комплексные числа $z_1 = 13 + i, z_2 = 7 - 6i$. Найти частное $\frac{z_1}{z_2}$.

Составим частное: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{13+i}{7-6i}$

Деление чисел осуществляется **методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение**, т.е. данное выражение будет с противоположным знаком от делителя.

Формула $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ и смотрим на наш знаменатель: $7 - 6i$. В знаменателе уже есть $(a-b)$, поэтому сопряженным выражением в данном случае является $(a+b)$, то есть $7 + 6i$.

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)}$

Далее в числителе нужно раскрыть скобки. А в знаменателе воспользоваться формулой $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ (помним, что $i^2=-1$ и не путаемся в знаках).

Распишем: подробно:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)} = \frac{91+7i+78i+6i^2}{7^2-(6i)^2} = \frac{91+7i+78i-6}{49-(-36)} =$$

$$= \frac{85+85i}{49+36} = \frac{85+85i}{85} = 1+i$$

Задание:

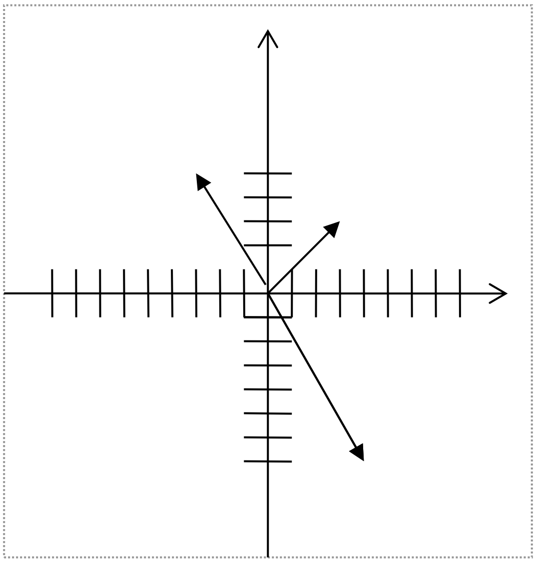
Даны два комплексных числа $z_1 = 5+2i$, $z_2 = 2-5i$. Найти их сумму, разность, произведение и частное.

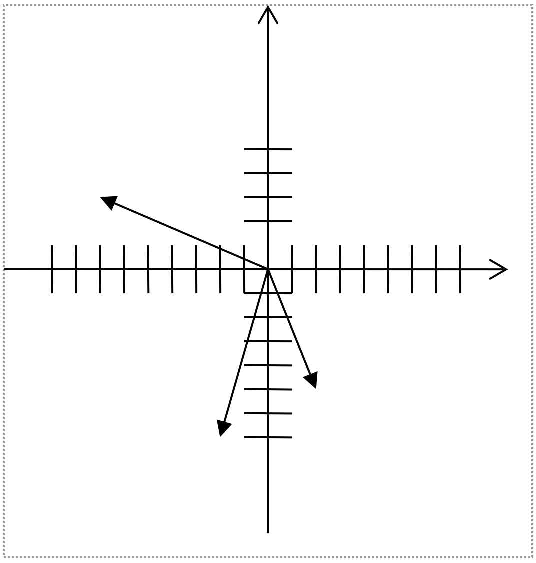
Практическая часть.

Вариант 1	***Вариант 2***
1. Изобразите на плоскости заданные комплексные числа:	
$Z_1 = 4i$	$Z_1= -5i$
$Z_2 = 3 + i$	$Z_2= 4 + i$
$Z_3= - 4 +3i$	$Z_3= -7 + 2i$
$Z_4= - 2 -5i$	$Z_4= -3 – 6i$
2 . Вычислите модули заданных комплексных чисел	
Z5 = 3 + 4i	Z5 = 8 + 6i
3. Произведите сложение и вычитание комплексных чисел:	
а) $(3 + 5i) + (7 – 2i)$.	$(3 – 2i) + (5 + i)$.
б) $(6 + 2i) + (5 + 3i)$.	$(4 + 2i) + (– 3 + 2i)$.
в) $(– 2 + 3i) + (7 – 2i)$.	$(– 5 + 2i) + (5 + 2i)$.
г) $(5 – 4i) + (6 + 2i)$.	$(– 3 – 5i) + (7 – 2i)$.
4. Произведите умножение комплексных чисел:	
а) $(2 + 3i)(5 – 7i)$.	$(1 –i)(1 + i)$.
б) $(6 + 4i)(5 + 2i)$.	$(3 + 2i)(1 + i)$.
в) 11) $(3 – 2i)(7 – i)$.	$(6 + 4i)3i$.
г) $(– 2 + 3i)(3 + 5i)$.	$(2 – 3i)(– 5i)$.
№ 5. Выполните действия:	
а) $(3 + 5i)^2$.	а) $(3 + 2i)^2$.
б) $(2 – 7i)^2$.	б) $(3 – 2i)^2$.
в) $(6 + i)^2$.	в) $(4 + 2i)^2$.
г) $(1 – 5i)^2$.	г) $(5 – i)^2$.
6. Выполните действия:	
а) $(3 + 2i)(3 – 2i)$.	а) $(7 – 6i)(7 + 6i)$.
б) $(5 + i)(5 – i)$.	б) $(4 + i)(4 – i)$.
в) $(1 – 3i)(1 + 3i)$.	в) $(1 – 5i)(1 + 5i)$.
7. Решите уравнения:	
а) $x^2 – 4x + 13 = 0$.	а) $2,5x^2 + x + 1 = 0$.
б) $x^2 + 3x + 4$	б) $4x^2 – 20x + 26 = 0$.

8. На рисунке показано графическое изображение комплексных чисел. Перерисуйте рисунок в тетрадь. Обозначьте комплексные

числа как z_1, z_2, z_3. Запишите соответствующие аналитические формы.





Контрольные вопросы:

1. Что такое комплексное число?

2. Как называется абсцисса и ордината в комплексном представлении числа?

Практическое занятие №5. Переход от алгебраической к тригонометрической форме.

Цель: освоить метод перехода от алгебраической формы к тригонометрической и показательной и обратно

Теоретическая часть.

Модуль и аргумент комплексного числа

Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называется выражение $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

<u>Пример 1:</u>

Найти модуль числа $z = 3 - 25i$.

Действительной частью комплексного числа $z = 3 - 25i$ является число $x = Re\,z = 3$, мнимой частью является $y = Im\,z = -25$. Следовательно, модуль числа равен

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-25)^2} = \sqrt{9 + 625} = \sqrt{634}$$

Если z является действительным числом, то его модуль равен абсолютной величине этого действительного числа.

Пример 2: $z = -7, r = |-7| = 7$

Свойства модуля:

1. $|z| \geq 0$
2. $|z| = 0$ – в том и только том случае, если z=0
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
4. $|z_1 * z_2| = |z_1| * |z_2|$
5. $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$
6. $|z_1 + z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, то есть модуль разности комплексных чисел равен расстоянию между этими числами на комплексной плоскости.

Пример 3: Найти произведение модулей комплексных чисел $z_1 = 1 - i, z_2 = 25i$

Модуль комплексного числа $z_1 = 1 - i$ равен $r_1 = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, модуль комплексного числа $z_2 = 25i$ равен $r_2 = \sqrt{0^2 + 25^2} = 25$. Следовательно, $r_1 * r_2 = 25\sqrt{2}$

Угол φ (измеряемый в радианах) радиус-вектора точки, которая соответствует комплексному числу z на комплексной плоскости, называется аргументом числа z: $\varphi = \arg z$. В таком случае вещественные числа x, y комплексного числа $z = x + iy$ можно выразить через модуль r и аргумент φ: $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi$.

Свойства аргумента:

1. $tg\varphi = \frac{y}{x}, ctg\varphi = \frac{x}{y}, sin\varphi = \frac{y}{r}$

2. Для комплексного числа $z \neq 0$ аргумент определяется с точностью до $2\pi n, n \in Z$. Для $z = 0$ значение аргумента не определено.

3. Главным значением аргумента называется число $\varphi \in (-\pi; \pi]$. Для обратного числа выполняется свойство: $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z$.

Тригонометрическая формы записи комплексных чисел.

Тригонометрической формой комплексного числа $z = x + iy$, не равного нулю, называется запись $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль комплексного числа z.

Пример 4. Выразить число $z_1 = 1 - i$ в тригонометрической форме.

Действительной частью комплексного числа $z_1 = 1 - i$ является число $x = Re\, z = 1$ мнимой часть является $u = Im\, z = -1$. Для нахождения тригонометрической формы записи комплексного числа нужно найти его модуль и аргумент.

Модулем комплексного числа z является число: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Аргумент вычисляется по формуле: $\varphi = \arg z = arctg\frac{y}{x} = arctg - \frac{1}{1} = arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$

Следовательно, тригонометрическая форма комплексного числа имеет вид: $z = \sqrt{2}(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right))$.

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Сравнение. Два комплексных числа $\text{j}z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ называются равными, если $|z_1| = |z_2|, arg\, z_1 = 2\pi n, n \in Z$.

Умножение. Для произведения комплексных чисел в тригонометрической форме верно равенство: $z_1 * z_2 = r_1 * r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

Пример 5. Найти произведение комплексных чисел $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right), z_2 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

Произведение комплексных чисел равно: $z_1 * z_2 = r_1 * r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = \sqrt{2} * \sqrt{2}(\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Деление. Частное комплексных чисел в тригонометрической форме выполняется по формуле: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Возведение в степень. Для возведения в степень комплексных чисел в тригонометрической форме верна формула: $z^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$

Комплексное сопряжение числа.

Если $z = a + bi$, то число $\bar{z} = a - bi$ называется **комплексным сопряженным** к числу z.

То есть у комплексно сопряженных чисел действительные части равны, а мнимые отличаются знаком.

Пример 6. Комплексно сопряженным к числу $z = 2 - i$ есть число $\bar{z} = 2 + i$.

На комплексной плоскости комплексно сопряжённые числа получаются зеркальным отражением друг друга относительно действительной оси.

Свойства комплексно сопряженных чисел

1. Если $z = \bar{z}$, то можно сделать вывод, что рассматриваемое число z является действительным.

2. Для любого комплексного числа z сумма $z + \bar{z} = 2Re\,z$ – действительное число.

Пример 7. Пусть $z = 2 - 3i$, тогда $\bar{z} = 2 + 3i$, а тогда z $+\bar{z} = 2 - 3\text{i} + (2 + 3\text{i}) = 2 - 3\text{i} + 2 + 3\text{i} = 2 + 2 = 4 \in \text{R}$

3. Для произвольного комплексного числа $z = a + bi$ произведение $z * \bar{z} = |z|2 \in R$.

Пример 7. Пусть $z = 2 - 3i$, комплексно сопряженное к нему число$\bar{z} = 2 + 3i$, тогда произведение $z \cdot\bar{z}= (2 - 3i)(2 + 3i) = 22 - (3i)2 = 22 - 32 \cdot i2 = 2^2 - 3^2 * (-1) = 2^2 + 3^2 = \sqrt{2^2 + 3^2}^2 = |z|^2 = 13 \in R$

4. Модули комплексно сопряженных чисел равны: $|z| = |\bar{z}|$, а аргументы отличаются знаком (рис. 1).

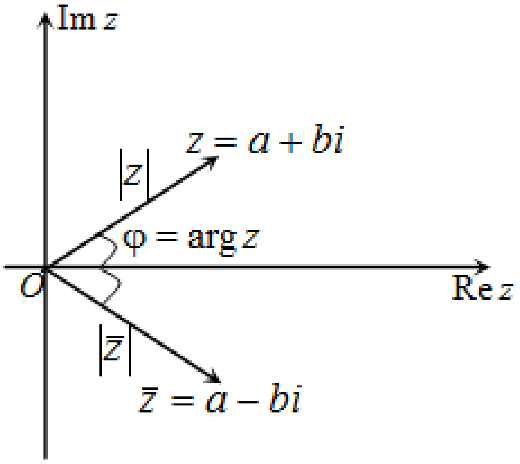


Рис. 1

5. $\overline{z1 \pm z2} = \overline{z1} \pm \overline{\mathbf{z2}}$

6. $\overline{z1 * z2} = \overline{z1} * \overline{\mathbf{z2}}$

7 .$\overline{z1/z2} = \frac{\overline{z1}}{\overline{z2}}$

8. $\overline{(\bar{z})} = z$

9. Если $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ - комплексно сопряженные числа, то $a = Re\,z = \frac{z+\bar{z}}{2}, b = Im\,z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

Практическая часть.

Вариант №1

1. Комплексное число задано в алгебраической форме $z = -4 + \sqrt{3}i$

а) Найти модуль комплексного числа, и записать его мнимую часть

б) найти значение выражения $z^2 - 5i$

в) перевести комплексное число z в показательную форму

2. Перечислите действия над комплексными числами в алгебраической форме и показательной форме (формулы)

3. Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме

$$z_1 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\Pi}{6} + i\ \sin\frac{\Pi}{6}\right)$$

$$z_2 = \sqrt{5}(\cos\frac{\Pi}{7} + i\ \sin\frac{\Pi}{7})$$

Вариант №2

1. Комплексное число задано в алгебраической форме $z = -2 - \sqrt{3}i$

а) найти модуль комплексного числа, записать его действительную часть

б) найти значение выражения $(z-1)^2 + 6i$

в) перевести комплексное число z в показательную форму

2. Запишите алгоритм перехода из алгебраической в тригонометрическую

форму

3. Выполнить действия над комплексными числами в показательной форме

$$z_1 = 10\ e^{\frac{\Pi}{4}i}$$

$$z_2 = -3\ e^{\frac{\Pi}{2}i}$$

Контрольные вопросы:

1. Как определить, что комплексное число задано в тригонометрической форме?

2. Опишите алгоритм перехода от алгебраической к тригонометрической форме

Раздел 3. Теория пределов

Практическое занятие №6. Вычисление простых пределов

Цель: Повторить основные теоремы о пределах, научиться вычислять значения пределов функции при $x \to a, x \to \infty$, используя замечательные пределы.

Теоретическая часть.

Основные теоремы о пределах.

1. Если C - постоянная величина, то $\lim\limits_{x\to a} C(x) = c$

2. Если C – const, то $\lim\limits_{x\to a} Cf(x) = C\lim\limits_{x\to a} f(x)$

3. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, то

1) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \pm \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$

2) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}, \quad \lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0$

4) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x))^{f_2(x)} = (\lim\limits_{x\to a}(f_1(x))^{\lim\limits_{x\to a}(f_2(x)}$

4. Если в некоторой окрестности точки x=a (кроме, быть может самой точки a) выполнено условие $f(x) = \varphi(x)$ и если предел одной из этих функций в точке a существует, то

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$

5. Если существует $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$ и $f(x)$ - элементарная функция, то

$\lim\limits_{x\to a} f(\varphi(x)) = f(\lim\limits_{x\to a} \varphi(x))$.

Если функция *f(x)* в предельной точке *x=a* не определена, тогда вычисление предела требует индивидуального подхода. В одних случаях вопрос сводится к применению теории о свойствах бесконечно малой и бесконечно большой функций и связи между ними.

Практическая часть.

ВАРИАНТ 1	
1. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x^2-6x+9}$ 2. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{4-x}$	1. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{tgx}{2x}$

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2-4x-5}$ 4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-7x^4+5}{x^2-4}$	2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{2x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 2x}{4x^3}$
ВАРИАНТ 2	
1. $\lim\limits_{x\to 36}\dfrac{6-\sqrt{x}}{36-x}$ 2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2-4x-5}$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-5x^4+4}{x^2-8}$ 4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2-x-6}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+2x^2-3x+5}{5-x^8+4x^7-x^2}$	1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-x}{x}\right)^{x}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 5x}{4x^2}$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x+1}\right)^{-x}$
ВАРИАНТ 3	
1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x+1}{5x-6x^2+9}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x-x^2}{3x+4}$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-8x+4}{3-10x^6+2x^3}$ 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$ 5. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x+4}$	1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{10x^2}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{2x}\right)^{x+1}$ *3.* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{3x}\right)^{\frac{x}{5}}$

Практическое занятие №7. Вычисление пределов с помощью замечательных

Цель: научиться вычислять пределы с помощью замечательных.

Теоретическая часть.

Более сложными случаями нахождения предела являются такие, когда подстановка предельного значения аргумента в выражение для f(x) приводит к одной из неопределенностей: $\infty-\infty$; $0\cdot\infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; 1^{∞}; 0^0; ∞^0

Здесь можно воспользоваться замечательными пределами:

1 – й замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

2 – й замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$

и правилом вычисления пределов отношения при$x\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^k+a_{1x}x^{k-1}+\ldots+a_k}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}=\begin{cases}\infty, если...k>n\\ \frac{a_0}{b_0}, если..k=n\\ 0, если...k<n\end{cases}$$

при раскрытии неопределенностей используют следующие приемы:

1) Сокращение дроби на множитель $(x-a)^{\alpha}$ при $x\to a$.

2) Избавление от иррациональности в числителе или знаменателе дроби.

3) Разложение многочленов на линейные или квадратичные множители при$x\to a$

Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x-2)=-4$

2) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{3(x-\frac{1}{3})(x+1)}{(3x-1)(9x^2+3x+1)}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{x+1}{9x^2+3x+1}=\frac{4}{3\cdot 3}=\frac{4}{9}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+5}{x^3+3x+7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+\frac{5}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{3x}{x^3}+\frac{7}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{1+\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x^3}}=\frac{0-0+0}{1+0+0}=0$

4) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x+1)-2}{(x-1)(x+1)}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

5)

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2})=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2})}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1-x-2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}=\frac{1-0}{0}=\infty$$

Вычислить пределы, используя замечательные:

1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\frac{7x\cdot 3x}{\sin 3x\cdot 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{7x}{3x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{7x}{3x}=$$
$$=1\cdot 1\cdot\frac{7}{3}=\frac{7}{3}$$

2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg10x}{\sin^2 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{\cos 10x\cdot\sin^2 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 10x\cdot 10x}{10x\cdot\cos 10x\cdot\sin^2 2x}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{10x}}_{1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2x}{\cos 10x\cdot\sin^2 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5}{\cos 10x\cdot\sin 2x}=1\cdot\frac{1}{0}=\infty$$

3)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x-1})^{x-1+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{1}=$$

$$\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}}_{e}\cdot\underbrace{\lim\left(1+\frac{1}{x-1}\right)}_{1}=e$$

4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}=$$

$$=1\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)}=1\cdot\frac{1}{1}=1.$$

5) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}.$$

Преобразуем дробь так, чтобы выделить первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{3x}{2x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot\frac{3}{2}}{}=1\cdot 1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

6) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\quad 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 0=0$$

Практическая часть.

Вариант 1	***Вариант 2***
1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 5x}$.	1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{tg\,5x}$.
2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ctg\,2x}{5x}$.	2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ctg\,4x}{5x}$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{x}$.	3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^{x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 2}(1+\frac{1}{x})^{x}$.	4. $\lim\limits_{x\to 3}(1+\frac{1}{x})^{x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{5x}$	5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{tg\,5x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{4x^2}$ 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-\frac{1}{3}x}$.	6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{2x^2}$
	7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}$

Раздел 4. Дифференциальное исчисление

Практическое занятие №8. Вычисление производной сложной функции

Цель: повторить правила и формулы вычисления производных, закрепить навыки вычисления производных

Теоретическая часть.

Пусть величина y зависит от аргумента x как $y = f(x)$. Если $f(x)$ была зафиксирована в двух точках значениях аргумента: x_1, x_2, то мы получаем величины $y_1= f(x_1)$, и $y_2 = f(x_2)$. Разность двух значений аргумента x_2, x_1 назовём **приращением аргумента** и обозначим как $\Delta x = x_2 - x_1$. Если аргумент изменился на $\Delta x = x_2 - x_1$, то функция изменилась (приросла) как разность двух значений функции

$y_1 = f(x_1)$, $y_2 =f(x_2)$ на величину приращения функции Δf. Записывается обычно так:

$\Delta f = y_1 - y_2 = f(x_2) - f(x_1)$. Считается, что если величины x_2 и x_1, бесконечно близки по величине друг к другу, тогда $\Delta x = x_2 - x_1$, - бесконечно мало.

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δf в этой точке к приращению аргумента Δx, когда последнее стремится к нулю (бесконечно мало). $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Нахождение производной называется **дифференцированием**. Функция f, имеющая производную в каждой точке некоторого промежутка, называется **дифференцируемой** на данном промежутке.

Правила вычисления производных

Вычисление производных основано на применении следующих **правил**, которые мы будем использовать без доказательств, поскольку доказательства выходят за рамки школьного курса математики.

Правило 1 (производная от произведения числа на функцию). Справедливо равенство $(c\,f\,(x))' = c\,f\,'\,(x)$, где c – любое число.

Другими словами, **производная от произведения числа на функцию** равна **произведению этого числа на производную функции**.

Правило 2 (производная суммы функций). Производная суммы функций вычисляется по формуле $(f\,(x) + g\,(x))' = f\,'\,(x) + g'\,(x)$,

то есть **производная от суммы функций** равна **сумме производных** этих функций.

Правило 3 (производная разности функций). Производная разности функций вычисляется по формуле $(f\,(x) – g\,(x))' = f\,'\,(x) – g'\,(x)$,

то есть **производная от разности функций** равна **разности производных** этих функций.

Правило 4 (производная произведения двух функций). Производная произведения двух функций вычисляется по формуле $(f\,(x)\,g\,(x))' = f\,'\,(x)\,g\,(x) + f\,(x)\,g'\,(x)$,

Другими словами, **производная от произведения двух функций** равна **производной от первой функции, умноженной на вторую функцию, плюс первая функция, умноженная на производную от второй функции.**

Правило 5 (производная частного двух функций). Производная от дроби (частного двух функций) вычисляется по формуле

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

В следующей таблице приведены формулы для производных от степенных, показательных (экспоненциальных), логарифмических, тригонометрических и обратных тригонометрических функций.

Многочлены

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$x' = 1$

$(x^2)' = 2x$

$(x^3)' = 3x^2$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

Корни

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

Тригонометрия

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Логарифмы

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\ln(kx+b))' = \frac{k}{kx+b}$

Показательные

$(e^x)' = e^x$

$(e^{kx+b})' = k \cdot e^{kx+b}$

Алгебраические операции

$(f+g)' = f' + g'$

$(f-g)' = f' - g'$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Если c — произвольная постоянная

$c' = 0$

$(c \cdot f)' = c \cdot f'$

Производная сложной функции:

$x \to g(x) \Rightarrow f'(x) \to f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Практическая часть.

1. Найдите производные функций

Вариант	Функции
1	а) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}$, в) $y = 3^{x^2+\frac{1}{x^2}}$, д) $y = \log_{\frac{2}{5}}\left(x^2+\sqrt{x}\right)$, б) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x+x^2+3}}$, г) $y = e^{\frac{x}{\sqrt{x}+4}}$, е) $y = \sin^3(2x+4)$
2	а) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}$, б) $y = 3^{x^2+\frac{1}{x^2}}$, в) $y = \log_{\frac{2}{5}}\left(x^2+\sqrt{x}\right)$, г) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+x-1}}$, д) $y = 3^{x^2-\frac{1}{x^3}}$, е) $y = 6\log_{\frac{3}{5}}\left(x-\sqrt{x}\right)$,
3	а) $y = \frac{3x}{\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x}}}$, б) $y = e^{x^2+\frac{1}{x\sqrt{x}}}$, в) $y = tg^3 x$ г) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}$, д) $y = 3^{x^2+\frac{1}{x^2}}$, е) $y = \log_{\frac{2}{5}}\left(x^2+\sqrt{x}\right)$,
4	а) $y = \sqrt[3]{x^2 \cdot (1+x)}$, б) $y = e^{x^2+\sin x}$, в) $y = \ln^3\left(\frac{x}{2x-1}\right)$, г) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-2x}}$, д) $y = 7^{x^2+\frac{1}{x^2}}$, е) $y = \log_{\frac{2}{5}}\left(x^2+4\sqrt{x}\right)$

5	а) $y=\left(\frac{1}{\sqrt{x\cdot(1+x)}}\right)^{-3}$, б) $y=2^{x+\cos^2 x}$, в) $y=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, г) $y=\frac{4x}{\sqrt{x^2-2x}}$, д) $y=3^{x^2+\frac{1}{x^2}}$, е) $y=\log_7^2\left(7x^2+\sqrt{x}\right)$
6	а) $y=\left(\frac{1}{\sqrt{x\cdot(1+x)}}\right)^{-3}$, б) $y=2^{x+\cos^2 x}$, в) $y=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, г) $y=\frac{4x}{\sqrt{x^2-2x}}$, д) $y=3^{x^2+\frac{1}{x^2}}$, е) $y=\log_7^2\left(7x^2+\sqrt{x}\right)$
7	а) $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x+7x^2}}$, б) $y=e^{x^2+\frac{1}{x}}$, в) $y=\lg^3\left(3x^2+2\right)$, г) $y=2x\cdot\sqrt[3]{x^2+4x}$, д) $y=e^{x^2+\sin x}$, е) $y=\log_7^2\left(x^2+16x\right)$
8	а) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}$, б) $y=3^{x^2+\frac{1}{x^2}}$, в) $y=\log_5^2\left(x^2+\sqrt{x}\right)$, г) $y=\sqrt[3]{x\cdot(1+\ln x)}$, д) $y=e^{x^2+\sin x}$, е) $y=\sin^2\left(2x^2+x-1\right)$
9	а) $y=2x\cdot\sqrt[3]{x^2+4x}$, б) $y=e^{x^2+\sin x}$, в) $y=\log_7^2\left(x^2+16x\right)$ г) $y=\frac{3x}{\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x}}}$, д) $y=e^{-x+\operatorname{tg}x}$, е)$y=\sin^4\left(\sqrt{x}+1\right)$,
10	а) $y=\frac{x-1}{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}$, б) $y=e^{-x^2+\operatorname{tg}x}$, в) $y=\cos^3\left(\sqrt{x}+1\right)$, г) $y=\sqrt[3]{x^2\cdot(1+x)}$, д) $y=e^{x^2+\sin x}$, е) $y=\ln^3\left(\frac{x}{2x-1}\right)$

Практическое занятие №9. Применение производных в решении прикладных задач

Цель: Освоить на конкретных примерах дифференцирование сложных функций

Теоретическая часть.

Теорема Если функция $x=\varphi(t)$ имеет производную в точке t, а функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x, то сложная функция

$y=F(t)=f[\varphi(t)]$ (1)

имеет производную (по t) в точке t и справедливо равенство

$F'(t) = f'(x)\varphi'(t)$ (2)

Пример $y = \ln \sin^2 x \quad (x \neq k\pi, \; k - \text{целое})$.

Полагаем $y = \ln u$, $u = v^2$, $v = \sin x$. Тогда

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x = \frac{1}{u} 2v \cos x = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^2 x} = 2 \operatorname{ctg} x.$$

$y = \sin\left(x^2 + 2x - 1\right)$.

Практическая часть.

Вариант 1

Задание №1: Вычислить производные функций:

1. $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x^3\sqrt{x} + \frac{1}{x^3} + 7^{2x-7}$
2. $y = \left(x^4 - x^2 + 1\right)^{-10}$
3. $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x - 1}$
4. $y = \frac{1 - tg2x}{1 + \cos 2x}$
5. $y = \lg \frac{10 - x}{x + 2}$

Задание №2: Найти дифференциалы функций:

1) $y = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$ 2)y=sin(cos(ln6x))

Вариант 2

Задание №1: Вычислить производные функций:

1. $y = \sqrt[3]{4x^3 - 7x^2 + 1}$
2. $y = \left(\sin^2 x + 1\right)e^x$
3. $y = \sqrt[3]{x^2 - 1} \cdot \left(x^4 - 1\right)$
4. $y = \ln \sqrt{x^2 - 1}$

5. $y = e^{x^3 - 5x^2}$

Задание №2: Найти дифференциалы функций:

1) $y = x^4\left(8\ln^2 x - 4\ln x + 1\right)$ 2) y= $2\sin^3(\ln 5x)$

Практическое занятие №10. Исследование функций с помощью производной.

Цель: научиться исследовать функции с помощью производных

Теоретическая часть.

I. Признаки возрастания и убывания функции

Рассмотрим функцию непрерывную на некотором промежутке.

а) Если в некотором промежутке производная функции больше нуля, то функция возрастает на этом промежутке;

б) Если в некотором промежутке производная функции меньше нуля, то функция убывает на этом промежутке.

Промежутки, на которых функция только возрастает или только убывает, называются **промежутками монотонности.** Переход от возрастания к убыванию и обратно возможен лишь в точках, при переходе через которые, производная меняет свой знак. Такими точками являются те, в которых производная равна нулю или не существует, они называются **критическими**. Таким образом, точки, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются критическими точками функции. **Однако не во всех критических точках функция имеет экстремум**!!!. Например, функция $y = x^3$ не имеет экстремумов, хотя ее производная $y'(0)=0$.

Порядок нахождения промежутков монотонности:

1. Найти область определения функции.
2. Найти первую производную функции.
3. Найти критические точки, исследовать знак первой производной в промежутках, на которые найденные критические точки делят область

определения функции.

Рассмотрим несколько примеров исследования функции на возрастание и убывание функции.

Найти промежутки монотонности функций:

1) $y=x^3 - 3x^2$

а) область определения: $D(y)$: $x \in R$, б) найдем производную: $y' = 3x^2 - 6x$,

в) найдем критические точки: $y' = 0$; $3x^2 – 6x = 0$, $x = 0$ и $x=2$

Исследуем знак производной в полученных промежутках, решение представим в виде таблицы.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;+\infty)$
$y'(x)$	+	0	-	0	+
$y(x)$	↑		↓		↑

Итак, в промежутках $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$ функция $y=x^3 - 3x^2$ возрастает, в промежутке $x\in(0;2)$ - убывает.

2) $y = -x^3$

а) область определения: $D(y)$: $x \in R$,

б) найдем производную: $y' = -3x^2$,

в) найдем критические точки: $y' = 0$; $-3x^2 = 0$, $x = 0$.

Исследуем знак производной в полученных промежутках, решение представим в виде таблицы.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;+\infty)$
$y'(x)$	-	0	-
$y(x)$	↓		↓

Функция $y = -x^3$ убывает на всей области определения.

3) $y=x^2–5x+6$

а) область определения: $D(y)$: $x \in R$, б) найдем производную: $y' = 2x - 5$,

в) найдем критические точки: $y' = 0$; $2x – 5 = 0$, $x = 2{,}5$.

Исследуем знак производной в полученных промежутках, решение представим в виде таблицы.

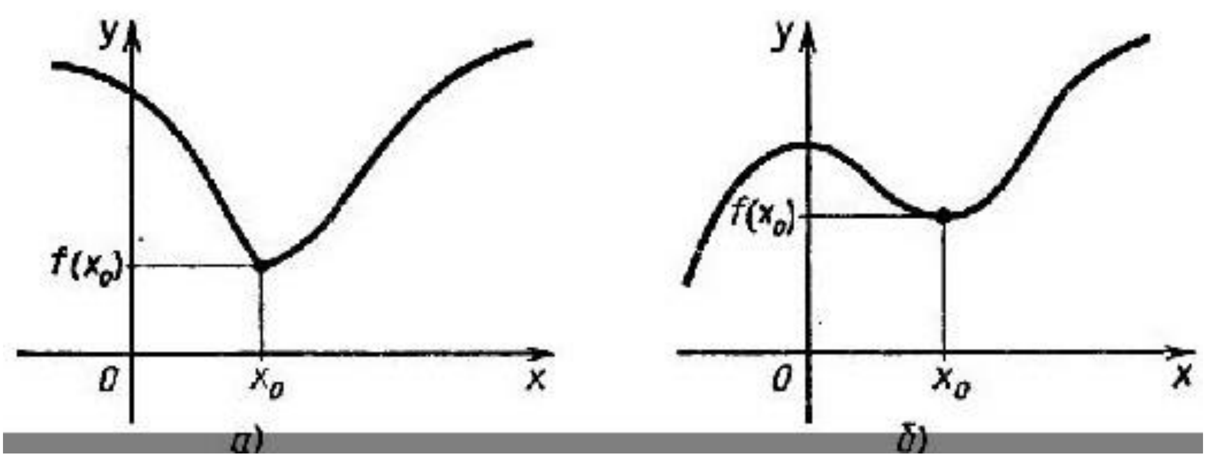
x	$(-\infty;2{,}5)$	2,5	$(2{,}5;+\infty)$
$y'(x)$	-	0	+
$y(x)$	↓		↑

Функция $y=x^2-5x+6$ возрастает на промежутке **$x \in (2{,}5;+\infty)$**, убывает на промежутке

$x \in (-\infty;\ 2{,}5)$

II. Максимум и минимум функции (экстремум), необходимое и достаточное условие существования максимума и минимума функции

Пусть график некоторой функции имеет вот такой вид



а) Если рассмотреть значение функции в точке x_0, то оно будет наименьшим (минимальным), чем в любой другой из близлежащей окрестности. В этом случае говорят, что x_0 - точка минимума.

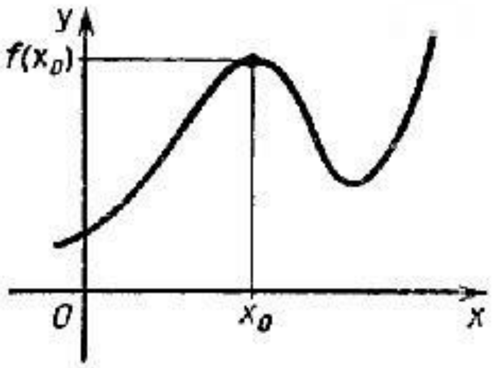
Точка x_0 из области определения функции *называется точкой* ***минимума,*** если для любого x из окрестности точки x_0 будет выполнятся неравенство $f(x) > f(x_0)$.

б) Если рассмотреть значение функции в точке x_0 на этом графике, то оно будет наибольшим (максимальным), чем в любой другой точке из близлежащей окрестности. В этом случае говорят, что x_0 - точка максимума.

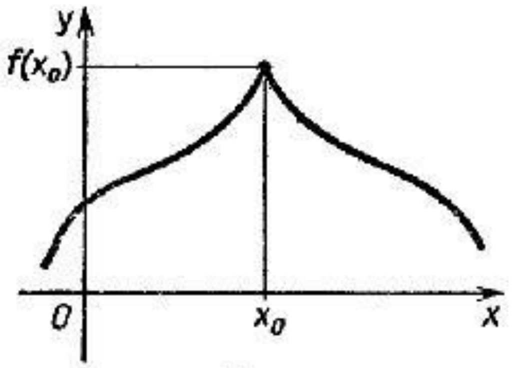
Точка x_0 из области определения функции *называется точкой* ***максимума***, если для любого x из окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Максимум и минимум функции объединяют словом **экстремум** (с латинского - крайний), а точки максимума и минимума называют **точками экстремума** (экстремальными точками).

Не следует считать, что максимум является наибольшим на всей области определения этой функции; он является наибольшим лишь по сравнению со значениями, взятыми в некоторой окрестности точки максимума. На данном



а)



б)

интервале функция может иметь несколько максимумов, причѐм некоторые из максимумов могут быть меньше некоторых минимумов:

График под буквой б) - это пример функции, которая в точке x_0 экстремума не имеет. При каких же условиях функция имеет экстремум? Исследуем поведение функции в окрестности точек экстремума. Видно, что точка максимума служит границей перехода от возрастания к убыванию функции, а точка минимума - от убывания к возрастанию.

Необходимое условие существования экстремума функции в точке: Если x_0 - точка экстремума функции и в этой точке функция дифференцируема, то производная в этой точке равна нулю.

(Точками экстремума могут служить лишь критические точки, в которых производная равна нулю или не существует).

Необходимое условие не является достаточным, т.е. из того факта, что производная равна нулю в некоторой точке, не следует, что функция в этой точке имеет экстремум (например, функция $y = -x^3$).

Достаточное условие существования максимума состоит в смене знака производной при переходе через критическую точку с "+" на "-", а для минимума с "-" на "+". Если при переходе через критическую точку смены знака производной не происходит, то в данной точке экстремума нет.

Исследование функции на экстремум План исследования функции на экстремум:

1. Найти область определения функции.
2. Найти производную.
3. Найти критические точки, в которых производная равна нулю или не существует. Расположить их в порядке возрастания.
4. Исследовать знак производной в полученных промежутках.
5. Вычислить значение функции в точках максимума и минимума.

Практическая часть.

Найти экстремумы функций:

1. область определения *D(y): x ∈ R*,
2. найдем производную: $y' = 2x^3 - 2x$,
3. найдем критические точки: $y' = 0$; $2x^3 - 2x = 0$; x=0, x=1, x=-1.

Исследуем знак производной в полученных промежутках, решение представим в виде таблицы.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	y_{min} = ↓	Минимум 0,5	y_{max} = ↑	Максимум 0	y_{min} = ↓	Минимум 0,5	↑

Аналогичным образом самостоятельно найдите экстремумы функций: б) $y=x^2-5x+5$

в) $y=5+12x-x^3$

4. Исследуйте следующие функции на монотонность и экстремум

$f(x) = x^3 - 2x + 7$

$f(x) = x^2 - 6x + 5$

Раздел 5. Интегральное исчисление

Практическая работа №11. Нахождение неопределенных интегралов табличным методом и методом подстановки.

Цель: Освоить и закрепить на практических примерах основные свойства неопределённого интеграла и метод непосредственного интегрирования функций.

Теоретическая часть.

Свойства неопределенного интеграла

1. Интеграл суммы равен сумме интегралов:

$\int \left(f(x)+g(x) \right) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$\int a \cdot f(x)dx = a\int f(x)dx$.

3. Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

4. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

5. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная $\int df(x) = f(x) + C$

Таблица основных неопределённых интегралов

$1. \int dx = x + C;$

$2. \int x dx = \frac{x^2}{2} + C;$

$3. \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C;$

$4. \int \frac{dx}{x} = \ln x + C;$

$5. \int e^x dx = e^x + C;$

$6. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

$7. \int \sin x dx = -\cos x + C;$

$8. \int \cos x dx = \sin x + C;$

$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$

$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$

$11. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$

$12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C;$

$13. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$

$14. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C.$

Практическая часть.

Вариант №1

Задание: Найти интегралы, используя таблицу и основные свойства.

1. $\int \left(4\sqrt{x} + \cos x - \frac{5}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$

2. $\int \frac{5x}{x^2} dx$

3. $\int (e^x + 6x - 14x^{-5} + \frac{1}{x}) dx$

4. $\int \frac{x^3 + 3x + 1}{x} dx$

Вариант №2

Задание: Найти интегралы, используя таблицу и основные свойства.

1. $\int \cos \frac{t}{2} dt$

2. $\int \frac{x^3 + 4x}{x} dx$

3. $\int (e^x - \frac{1}{x})dx$

4. $\int \frac{2x^5 - x^4 - x - 1}{7x^2} dx$

Практическая работа №12. Нахождение неопределенных интегралов методом интегрирования по частям.

Цель: Освоить на практических примерах различные методы интегрирования

Теоретическая часть.

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (то есть подстановки). При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся. Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой. Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int F(x)dx.$$

Сделаем подстановку

$$x = \varphi(t),$$

Где, $\varphi(t)$— функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $dx = \varphi'(t) \cdot dt$

и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем формулу интегрирования подстановкой:

$$\int F(x)dx = \int F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Интегрирование по частям. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные первые производные и существует интеграл $\int v(x)\,du(x)$, то существует и интеграл $\int u(x)\,dv(x)$ и имеет место равенство:

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x)\,du(x)$$

или в более короткой форме:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du\,.$$

Обратите внимание, что интегрирование по частям и дифференциал произведения являются взаимно обратными операциями.

Практическая часть.

Вариант №1

Задание №1: Найти интегралы, используя подходящую подстановку.

1. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$

2. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+9}$

3. $\int \sqrt{4x^3+1}\,x^2 dx$

4. $\int \frac{xdx}{x^2-4}$

Задание №2: Найти интеграл, используя интегрирование по частям.

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$$

Вариант №2

Задание №1: Найти интегралы, используя подходящую подстановку.

1. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^6+7}}$

2. $\int \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$

3. $\int \sqrt[5]{2x-5}\,dx$

4. $\int \sqrt{e^x-5}\,e^x dx$

Задание №2: Найти интеграл, используя интегрирование по частям.

$\int 3x^2 \ln x dx$

Практическая работа №13. Вычисление определенного интеграла.

Цель: Освоить и закрепить на практических примерах основные свойства определённого интеграла и метод непосредственного интегрирования функций.

Теоретическая часть.

Определение. ***Определенным интегралом функции f(x), непрерывной на [a; b], называется приращение ее первообразной на этом промежутке***.

Обозначение: $\int_a^b f(x)dx$, где ***a и b – пределы интегрирования*** (нижний и верхний соответственно).

По определению, $\int_a^b f(x)dx$ = F(b) – F(a) = F(x)$|_a^b$ – **формула Ньютона – Лейбница**.

Таким образом, отличие определенного интеграла от неопределенного: определенный – число; неопределенный – множество функций.

Геометрический смысл определенного интеграла: ***если a≤b и ∀x∈[a; b] f(x) ≥ 0, то*** $\int_a^b f(x)dx$ ***численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции***.

Свойства определенного интеграла

1. Интеграл суммы равен сумме интегралов:

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x) \right) dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx .$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int_a^b af(x)dx = a\int_a^b f(x)dx .$$

3. Если поменять местами пределы интегрирования, то интеграл изменит знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

4. Если пределы интегрирования равны, то интеграл равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

5. Отрезок интегрирования можно разбить на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Практическая часть.

Вариант №1

1. Перечислите свойства определённых интегралов. Приведите на каждое свойство не менее трёх примеров.

2. Вычислить следующие определённые интегралы**.**

- $\int_2^4 (\frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} - 2)dx$
- $\int_{-1}^3 (2e^x - \frac{2}{3}x)dx$
- $\int_{-2}^3 5x^2 dx$
- $\int_1^4 (\sqrt{x} + 2x - \frac{1}{x})dx$
- $\int_0^\pi (2\sin x - \frac{2}{3}\cos x + x)dx$

Вариант №2

1. Запишите формулу Ньютона-Лейбница, и дайте характеристику каждому элементу в этой формуле, приведите не менее трёх примеров вычисления определённого интеграла по данной формуле.

2. Вычислить следующие определённые интегралы

- $\int_{1}^{3}(\frac{2}{x^5}+\frac{-4}{x^3}-x-7)dx$
- $\int_{-1}^{3}(2e^x-\frac{2}{3}x)dx$
- $\int_{1}^{3}\frac{4}{7}x^{\frac{1}{3}}dx \int_{4}^{5}(\ln x-4\sqrt{2x})dx$
- $\int_{1}^{4}(\sqrt{7x}+2x^2-\frac{1}{x^3})dx$
- $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos x-\frac{2}{3}\sin x+3x)dx$

Раздел 6. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Практическая работа №14. Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Цель: Освоить решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, и однородных дифференциальных уравнений первого порядка

Теоретическая часть.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, которое содержит производную функции.

Решением дифференциального уравнения называется функция, подстановка которой обращает это уравнение в тождество.

Решение, содержащее произвольную постоянную С, называется **общим** решением дифференциального уравнения.

Если, учитывая начальные условия, найти значение С и подставить его в общее решение, то полученное решение называется **частным.**

Задача отыскания частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям, называется задачей **Коши**.

График функции, являющейся частным решением дифференциального уравнения, называется **интегральной кривой**.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в это уравнение.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида $\mathbf{P(y)dy = Q(x)dx}$ **(1)**

называется дифференциальным уравнением с **разделенными** переменными. Это уравнение решается интегрированием обеих частей. Уравнением с **разделяющимися** переменными называется уравнение, которое можно привести к виду (1).

Рассмотрим примеры решения дифференциальныхуравнений с разделяющимися переменными:

Пример 1. **Найти общее решение дифференциального уравнения (x+2) dy – ydx = 0.**

Решение. 1) Разделим переменные. Для этого перенесем ydx в правую часть уравнения и разделим обе части уравнения на (x+2) и на y:

$$\frac{\text{äó}}{\text{ó}} = \frac{\text{äõ}}{\text{õ}+2}$$

2) Проинтегрируем обе части уравнения: $\int \frac{\partial y}{y} = \frac{\partial x}{x+2}$;

$$\ln|y| = \ln|x+2| + C;$$

Так как C - произвольная постоянная, ее можно записать в виде lnC.

$\ln|y| = \ln|x+2| + \ln C;\ \ln|y| = \ln|C(x+2)|\ \ y = C(x+2) -$ <u>общее решение</u>

Ответ: y = C(x+2)

Практическая часть.

Вариант №1

Задание №1 Найдите общее и частное решение дифференциального уравнения

1. $x^3 ydx = y^2 xdy,$ при y=2, x=3
2. $(x+3)ydy - 3(y-3)xdx = 0$,при y=1, x=1
3. $(y-1)dx - (x-1)dy = 0$ при y=1 x=1
4. $2(x^2-4)ydy + (y^2-4)xdx = 0$ при y=1 x=1
5. $\frac{dx}{\sqrt{x}} - \frac{xdy}{\sqrt[3]{y}} = 0$ при y=1 x=1

Вариант №2

Задание №1 Найдите общее и частное решение дифференциального уравнения

1. $x^2 ydx = y^3 xdy,$ при y=2, x=2
2. $(x+1)ydy + 3(y-3)xdx = 0$,при y=1, x=1

3. $ydx - xy^2dy = 0$ при y=1 x=2

4. $(x^2-1)ydy + (y^2+1)xdx = 0$ при y=2 x=2

5. $\frac{y^3dx}{\sqrt{x}} + \frac{x^2dy}{\sqrt[3]{y}} = 0$ при y=1 x=1

Контрольные вопросы:

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Какое решение дифф. уравнения называется частным, какое общим?
3. В чём состоит суть метода разделяющихся переменных?
4. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением первого порядка? Приведите пример
5. Какое дифференциальное уравнение называется однородным дифференциальным? Приведите пример
6. Запишите чему равно частное решение в первых 3 примерах.

Практическая работа №15. Решение дифференциальных уравнений первого порядка.

Цель: Освоить решение однородных дифференциальных уравнений первого порядка

Теоретическая часть.

Дифференциальные уравнения первого порядка

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка $F(x, y, y') = 0$. Выразим производную:

$$y' = f(x, y). \qquad (*)$$

Дифференциальное уравнение может быть записано через дифференциалы

$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0.$

Определение. Условие равенства $y = y_0$ при $x = x_0$ называется *начальным условием*.

Определение. Общим решением уравнения (*) называется функция

$y = \varphi(x, C)$, зависящая от произвольной постоянной Cи удовлетворяющая условиям:

1. при любом значении C^* функция $y = \varphi(x, C^*)$ является решением (*);

2. для любой точки $M_o(x_o, y_o) \in D$существует значение постоянной $C=C_0$, что

$y_0 = \varphi(x_0, C_0)$.

Общее решение, когда переменная yне выражается через переменную x, называется общим интегралом $Ф (x, y, C) = 0$.

Определение. *Частным называется решение*, которое получается из общего при конкретном значении постоянной $C=C_0$. Аналогично получается частный интеграл $Ф (x, y, C_0) = 0$.

Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию, называется задачей Коши.

Замечание. Не любое частное решение может быть получено из общего решения. Если есть такое решение уравнения, то его будем называть особым.

Типы уравнений первого порядка и способы их решений

I. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение с разделяющимися переменными может быть представлено в следующих видах:

$$y' = g(x) \cdot h(y) \qquad (1) \text{ или}$$

$$M_1(x) \cdot M_2(y)\,dx + N_1(x) \cdot N_2(y)\,dy = 0. \qquad (1')$$

Для решения уравнения с разделяющимися переменными необходимо представить производную как отношение дифференциалов и разделить переменные, т.е. с одной стороны от знака равенства собрать выражение содержащее только x, с другой - только y:

$y' = g(x) \cdot h(y)$;

$M_1(x) \cdot M_2(y)\, dx + N_1(x) \cdot N_2(y)\, dy = 0$;

$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$; $\qquad M_1(x) \cdot M_2(y)\, dx = - N_1(x) \cdot N_2(y)\, dy$;

$\frac{dy}{h(y)} = g(x) \cdot dx$; $\qquad \frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx = \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy$;

$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) \cdot dx + C.$ $\qquad \int \frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx = \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy.$

Решения записаны с помощью интегралов, полученных при интегрировании уравнения. Эти решения содержат произвольную константу интегрирования и являются общими. А особые решения можно получить, решая алгебраические уравнения $h(y) = 0$; $N_1(x) = 0$; $M_2(y) = 0$.

Пример 1. Решить уравнение $3\, x\ln x \cdot y' = 5y - 4y\ln x$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Действительно, после преобразования получим

$$y' = \frac{5 - 4\ln x}{3x \ln x} \cdot y$$

Интегрируем полученное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5 - 4\ln x}{3x \ln x} \cdot y$$

Рассмотрим два случая:

1. $y = 0$. Легко убедиться, что данная функция является решением уравнения.

2. $\frac{dy}{y} = \frac{5-4\ln x}{3x\ln x} \cdot dx$; $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{5-4\ln x}{3x\ln x} dx$;

$\ln|x| = \int \frac{5}{3x\ln x} dx - \int \frac{4\ln x}{3x\ln x} dx$; $\qquad \ln|y| = \frac{5}{3}\ln|\ln x| - \frac{4}{3}\ln|x| + \ln|C|$;

$y = C\sqrt[3]{\frac{ln^5 x}{x^4}}.$

Здесь постоянная интегрирования представлена для удобства в виде логарифма, а модули отброшены, т.к. постоянная Cможет принимать и положительные и отрицательные значения. Функция, полученная в случае 2, является общим решением и включает в себя также решение случая 1, получаемое при $C = 0$.

II. Однородные уравнения первого порядка

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется однородной функцией порядка κ, если $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\kappa} f(x, y)$.

Определение. Уравнение $y' = f(x, y)$ называется однородным, если $f(x,y)$ является однородной функцией порядка 0. Тогда, принимая $\lambda = 1/x$, получаем

$$y' = f(x, y) = f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = q\left(\frac{y}{x}\right)$$

Таким образом, уравнение первого порядка является однородным, если его правая часть представима в виде функции, зависящей только от отношения переменных x и y

$$y' = q\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (2)$$

Однородное уравнение решается с помощью замены $\frac{y}{x} = t(x)$. При этом

$y=tx$, $y' = t'x + 1$. В новых переменных уравнение разрешает разделение переменных:

$$t'x + t = q(t);\ x\frac{dt}{dx} = q(t) - t;\ \int \frac{dt}{q(t) - t} = \int \frac{dx}{x};\ \int \frac{dt}{q(t) - t} = \ln|x| + C$$

Пример 2. Найти частное решение уравнения $x \cdot y' = 5xe^{\frac{2y}{x}} - 4 + y$; $y(1) = 0$.

Решение. Покажем, что это уравнение однородное. Выразим производную

$$y' = 5xe^{\frac{2y}{x}} - 4 + \frac{y}{x}$$

Правая часть уравнения зависит только от отношения переменных y и x, следовательно, уравнение - однородное. Введя замену $\frac{y}{x} = t(x)$, получим

$$x \cdot t' + t = 5e^{2t} - 4 + t;\ t' = \frac{5e^{2t} - 4}{x};\ \frac{dt}{5e^{2t} - 4} = \frac{dx}{x};\ \int \frac{dt}{5e^{2t} - 4} = \int \frac{dx}{x}$$

Вычислим интеграл слева:

$$\int \frac{dt}{5e^{2t}-\ 4} = \int \frac{e^{2t}dt}{5(e^{2t})^2-\ 4e^{2t}} = \frac{1}{10}\int \frac{de^{2t}}{(e^{2t})^2 - 2e^{2t}\frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{25}} =$$

$$= \frac{1}{10}\int \frac{d(e^{2t}-2/5)}{(e^{2t}-2/5)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{1}{10}\frac{1}{2 \cdot {}^2\!/_5}\ln\left|\frac{e^{2t}-7/5}{e^{2t}+\ 3/5}\right| = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{e^{2t}-7/5}{e^{2t}+\ 3/5}\right|$$

Общий интеграл уравнения может быть записан в следующем виде:

$$\frac{1}{8}\ln\left|\frac{e^{2y/x}-7/5}{e^{2y/x}+\ 3/5}\right| = \ln|x| + \frac{1}{8}\ln|C|;\ \ \frac{e^{2y/x}-7/5}{e^{2y/x}+\ 3/5} = Cx^8$$

Подставим в полученное решение в начальное $\frac{1-7/5}{1+\ 3/5} = C$; $\text{C} = \frac{2}{7}$

Таким образом, получим частный интеграл уравнения $\frac{e^{2y/x}-7/5}{e^{2y/x}+\ 3/5} = \frac{2}{7}x^8$

Практическая часть.

Задание 1. Решить уравнения с разделяющимися переменными

Вариант 1

1) $y' = 2e^{3x} - 4x^2 + 6.\ y(0) = 2$

2) $2x(2+y)\ dy = (x^2-7)(y-9)\ dx$

Вариант 2

1) $y' = 4e^{2x} - 2x^2 + 3.\ y(1) = 3$

2) $(4xy^2 - xy)\ dx = (xy+x+y+1)\ dy$

Задание 2. Решите однородное уравнение первого порядка

Вариант 1

1) $x5y\ -7x.\ y(1) = 2$

2) $11\text{y}\ y' = 3x+ y$

Вариант 2

1) $3xy' = 2e\ +9x.\ y(2) = 1$

2) $y\ y' = = x-y$

Контрольные вопросы:

1. Что называется, дифференциальным уравнением 1-го порядка?
2. Написать общий вид дифференциального уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.
3. Каков общий вид однородного дифференциального уравнения 1-го порядка?
4. Какая замена неизвестной функции позволяет свести однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка к уравнению с разделяющимися переменными?

Раздел 7. Элементы теории вероятностей и математической статистики

Практическая работа №16. Использование формул комбинаторики.

Цель: научиться применять формулы комбинаторики в зависимости от поставленной задачи.

Теоретическая часть.

Элементарная комбинаторика имеет дело с множествами, из которых выбираются подмножества с определенными свойствами.

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ – множество из n элементов

Комбинаторный объект – это подмножество с определенными свойствами из элементов множества A.

Комбинаторное число (связанное с комбинаторным объектом) – это количество комбинаторных объектов этого вида.

Размещением из n элементов по m называется упорядоченная выборка k элементов из этих n элементов. Число размещений из n по m обозначается как $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Пример 1.4. Турист может посетить города Углич, Ростов, Ярославль, Кострому, Сергиев Посад. Сколько маршрутов с последовательным посещением трех городов он может составить?

Решение. Воспользуемся формулой из теоремы 1.1: $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 3 * 4 * 5 = 60$ Т.е. можно составить 60 таких маршрутов

Перестановкой n элементов называется упорядоченная выборка этих n элементов. Число перестановок n элементов обозначается как $P_n = n!$.

Пример 1.6. Восемь студентов пишут ответ на экзаменационный вопрос. Сколькими способами их могут последовательно вызвать отвечать?

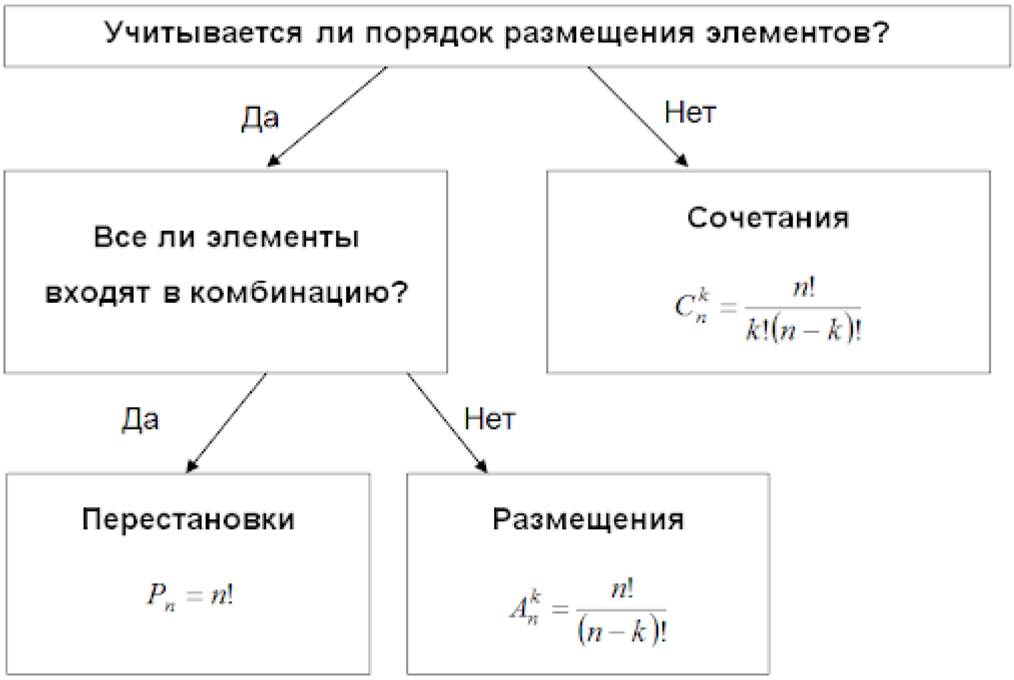
Решение. Воспользуемся формулой из теоремы 1.2: P8 = 8 · 7 · · · · · 1 = 5760.

Сочетанием из n элементов по m называется неупорядоченная выборка m элементов из этих n элементов. Число сочетаний из n по m обозначается как $C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)\,!}$

Пример 1.11. В олимпиаде по программированию может участвовать команда из трех студентов группы. Сколько возможностей составить команду, если в группе 20 студентов?

Решение. Воспользуемся формулой из теоремы 1.4: $C_{20}^3 = \frac{20!}{3!\,(20-3)\,!} =$ 1140

Схема выбора необходимой формулы.



Практическая часть.

Задача 1. Цифры 1, 2, 3, …, 9, выписанные на отдельные карточки складывают в ящик и тщательно перемешивают. Наугад вынимают одну карточку. Найти вероятность того, что число, написанное на этой карточке: а) четное; б) двузначное.

Задача 2. В урне 15 шаров: 5 белых и 10 черных. Какова вероятность вынуть из урны синий шар?

Задача 3. В урне 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Вынули два шара. Какова вероятность, что оба шара белые?

Задача 4. В кабинете работают 6 мужчин и 4 женщины. Для переезда наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц три женщины.

Задача 5. В ящике находится 10 стандартных и 5 нестандартных деталей. Какова вероятность, что среди наугад взятых 6 деталей будет 4 стандартных и 2 нестандартных?

Задача 6. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 5,6,7,8 при условии, что каждая цифра входит в запись числа ровно один раз.

Задача 7. В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человека, при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?

Задача 8. Для участия в команде тренер отбирает 5 мальчиков из 10. Сколькими способами он может сформировать команду, если 2 определенных мальчика должны войти в команду?

Практическая работа №17. Вычисление вероятностей.

Цель: научиться вычислять вероятность заданных по условию задачи событий.

Теоретическая часть.

Классификация событий

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие события. Под ***событием*** понимают любой факт, который может произойти в результате опыта или испытания. Под ***опытом***, или ***испытанием***, понимается осуществление определённого комплекса условий.

Операции над событиями

При разработке аппарата и методики исследования случайных событий в теории вероятностей очень важным является понятие суммы и произведения событий.

Суммой, или объединением, нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.

Сумма S событий $A, B, C, \dots, N$обозначается так: $S = A + B + C + \cdots + N$

Например, если событие A есть попадание в цель при первом выстреле, событие B — при втором, то событие $C = A + B$ есть попадание в цель вообще, безразлично, при каком выстреле — первом, втором или при обоих вместе.

Произведением, или пересечением, нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Произведение S событий $A, B, C, \dots, N$обозначается $S = A * B * C * \dots * N$.

Например, если событие A есть попадание в цель при первом выстреле, событие B — при втором, то событие $C = AB$ состоит в том, что в цель попали при обоих выстрелах.

Классическое определение вероятности случайного события

Для количественного сравнения событий по степени возможности их появления вводится числовая мера, которая называется вероятностью события.

Вероятностью события называется число, являющееся выражением меры объективной возможности появления события.

Вероятность события A будем обозначать символом $P\{A\}$.

Вероятность события A ***равна отношению числа случаев*** m***, благоприятствующих ему, из общего числа*** n ***единственно возможных, равновозможных и несовместных случаев к числу*** n***,*** т.е.

$P\{A\} = \frac{m}{n}$ (1.1)

Из формулы (1.1) следует, что вероятность события является неотрицательным числом и может изменяться в пределах от нуля до единицы в зависимости от того, какую долю составляет благоприятствующее число случаев от общего числа случаев:

$$0 \leq m \leq n, 0 \leq \ P\{A\} \leq 1$$

Свойства вероятности

Свойство 1. *Если все случаи являются благоприятствующими данному событию A, то это событие обязательно произойдет. Следовательно, рассматриваемое событие является достоверным, а вероятность его появления $P\{A\} = 1$, так как в этом случае $m = n$:*

$$P\{A\} = \frac{m}{n} = 1$$

Свойство 2. *Если нет ни одного случая, благоприятствующего данному событию A, то это событие в результате опыта произойти не может. Следовательно, рассматриваемое событие является невозможным, а вероятность его появления $P\{A\} = 0$, так как в этом случае $m = 0$:*

$$P\{A\} = \frac{0}{n} = 0$$

Свойство 3. *Вероятность наступления событий, образующих полную группу, равна единице.*

Свойство 4. *Вероятность наступления противоположного события $\bar{A}$ определяется так же, как и вероятность наступления, события A:*

$$P\{A\} = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n}$$

Где $(n - m)$ — число случаев, благоприятствующих появлению противоположного события $\overline{A}$. Отсюда вероятность наступления противоположного события $\bar{A}$ равна разнице между единицей и вероятностью наступления события A:

$P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\}$ (1.2)

Важное достоинство классического определения вероятности события состоит в том, что с его помощью вероятность события можно определить, не прибегая к опыту, а исходя из логических рассуждений.

Пример 1. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение. Обозначим A событие, состоящее в том, что набрана нужная цифра. Абонент мог набрать любую из 10 цифр, поэтому общее число возможных исходов равно 10. Эти исходы единственно возможны (одна из цифр набрана обязательно) и равновозможны (цифра набрана наудачу). Благоприятствует событию A лишь один исход (нужная цифра лишь одна). Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех исходов:

$$P\{A\} = \frac{m}{n} = \frac{1}{10} = 0.1.$$

Практическая часть.

Вариант 1

1. Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов - первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора Иванова окажется запланированным на последний день конференции?
2. В случайном эксперименте бросают 2 игральные кости. Найти вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Ответ округлите до сотых.
3. В кармане у Андрея было 4 монеты по 2 рубля и 2 монеты по 5 рублей. Он, не глядя, переложил 3 монеты в другой карман. Найти вероятность того, что обе монеты по 5 рублей лежат в одном кармане.

Вариант 2

1. В соревнованиях по плаванию участвуют 4 спортсмена из России, 7 спортсменов из Италии, 9 спортсменов из Финляндии и 5 - из Швейцарии.

Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий последним, окажется из Швейцарии.

2. В случайном эксперименте бросают 2 игральные кости. Найти вероятность того, что в сумме выпадет 6 очков. Ответ округлите до сотых.

3. В кармане у Марины было 6 монет по 1 рублю и 2 монеты по 5 рублей. Она, не глядя, переложила 4 монеты в другой карман. Найти вероятность того, что обе монеты по 5 рублей лежат в одном кармане. Ответ округлите до сотых.

Вариант 3

1. Конкурс исполнителей проводится 3 дня. Всего заявлено 80 выступлений – по одному от каждой страны. В первый день пройдёт 20 выступлений. А остальные распределены поровну между оставшимися днями. Какова вероятность того, что выступление представителя России состоится в третий день?

2. Игральный кубик бросили один раз. Какова вероятность того, что выпадет не менее 4 очков?

3. В кармане у Юлии было 4 монеты по 1 рублю и 2 монеты по 2 рубля. Она, не глядя, переложила 3 монеты в другой карман. Найти вероятность того, что обе монеты по 2 рубля лежат в одном кармане.

Вариант 4

1. Конкурс исполнителей проводится 3 дня. Всего заявлено 60 выступлений – по одному от каждой страны. В первый день пройдёт 30 выступлений. А остальные распределены поровну между оставшимися днями. Какова вероятность того, что выступление представителя Франции состоится в третий день?

2. Игральный кубик бросили один раз. Какова вероятность того, что выпадет более 3 очков?

3. В кармане у Ивана было 6 монет по 2 рубля и 2 монеты по 5 рублей. Он, не глядя, переложил 4 монеты в другой карман. Найти вероятность того, что обе монеты по 5 рублей лежат в одном кармане. Ответ округлите до сотых.