Департамент внутренней и кадровой политики Белгородской области
Областное государственное автономное профессиональное образовательное учреждение
«Белгородский индустриальный колледж»

Рассмотрено
Цикловой комиссией
«Информатики и ПОВТ»
Протокол заседания № __
от «__» ________ 20__ г.
Председатель цикловой комиссии
________________/Третьяк И.Ю.

КОМПЛЕКС УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ РЕКОМЕНДАЦИЙ
для выполнения практических работ
по дисциплине
ОУД.04 «МАТЕМАТИКА»

по специальности
10.02.04 «Обеспечение информационной безопасности телекоммуникационных систем»

Разработчик преподаватель:
Хайминова Татьяна Сергеевна,
ОГАПОУ «Белгородский индустриальный колледж

г. Белгород, 2021

Хайминова Татьяна Сергеевна

Содержание

Хайминова Татьяна Сергеевна

Пояснительная записка

Данная разработка содержит методические указания к практическим работам по дисциплине ОУД.04 «Математика» предназначена для обучающихся по специальности 10.02.04 «Обеспечение информационной безопасности телекоммуникационных систем».

Цель разработки: оказание помощи обучающимся в выполнении практических работ по предмету ОУД.04 Математика.

Практические занятия способствуют развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня. Выполнение практических работ является обязательным видом учебной деятельности студента. К практическому занятию от студента требуется предварительная подготовка, которую он должен провести перед занятием. Практические задания выполняются студентом самостоятельно, с применением знаний и умений, полученных на уроках, а также с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания. Список литературы и вопросы, необходимые при подготовке, студент получает перед занятием из методических рекомендаций к практическому занятию.

Практические задания разработаны в соответствии с учебной программой. Оценка за самостоятельную работу выставляется в журнал учебных занятий и влияет на результат промежуточной аттестации по дисциплине. Зачет по каждой практической работе студент получает после её выполнения и предоставления преподавателю на проверку, где указаны полученные знания и умения студента. При проверке выполненного задания преподаватель задает обучающемуся вопросы, если таковые возникнут, с целью получить от него ответы.

Хайминова Татьяна Сергеевна

Практическая работа №1. Действия над комплексными числами

Цель: познакомить учащихся с понятием комплексного числа и освоить выполнение действий над комплексными числами в алгебраической форме.

Теоретическая часть.

Определение. Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$**,** где *x, y* – вещественные числа, а i - *мнимая единица*, причем $i^2 = -1$. Множество комплексных чисел обозначается С.

Определение. Действительное число x называют *действительной частью* комплексного числа z и обозначают $x = \operatorname{Re} z$, а iy *называют мнимой частью* комплексного числа z и обозначаются $y = \operatorname{Im} z$.

Определение. Выражение вида $z=x+iy$ называют *алгебраической формой записи* комплексного числа *z*.

Определение. Два комплексных числа вида $z=x+iy$ *и* $\bar{z} = x - iy$ отличных друг от друга лишь знаком мнимой части называют *сопряженными.*

Пример 1. Решить уравнение $x^2 - 6x + 18 = 0$.

Решение: Вычислим дискриминант данного уравнения: $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 36 - 72 = -36$ меньше нуля, но теперь мы можем воспользоваться мнимой единицей:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{6 \pm 6\,i}{2}, \text{ т.е. } x_1 = 3 + 3i; \quad x_2 = 3 - 3i.$$

Над комплексными числами в алгебраической форме можно выполнять следующие действия.

1) Сложение;

Определение. Суммой комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1$ и $z_2 = x_2 + y_2$ называется комплексное число *z,* действительная часть которого равна сумме действительных частей z_1 и z_2, а мнимая часть - сумме мнимых частей чисел z_1 и z_2, то есть $z = (z_1 + z_2) + (y_1 + y_2)\,i$

Сложение комплексных чисел обладает следующими свойствами:

a) Коммутативность: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

b) Ассоциативность: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

c) Комплексное число вида x–yi называется *противоположным* комплексному числу z = x + yi.

Комплексное число, противоположное комплексному числу *z*, обозн ачается -*z*. Сумма комплексных чисел *z* и -*z* равна нулю: $z + (-z) = 0$

Пример 2. Выполните сложение комплексных чисел $z_1 = (3 - i)$ *и* $z_2 = (-1 + 2i)$.

Решение: $z_1 + z_2 = (3 - i) + (-1 + 2i) = (3 + (-1)) + (-1 + 2)i = 2 + 1i$.

2) Вычитание;

Определение. Вычесть из комплексного числа z_1 комплексное числоz_2, значит найти такое комплексное число *z*, что $z + z_2 = z_1$.

Теорема. Разность комплексных чисел существует и притом единственная.

Пример 3. Выполните вычитание комплексных чисел $z_1 = (4 - 2i)$ *и* $z_2 = (-3 + 2i)$.

Решение: $z_1 - z_2 = (4 - 2i) - (-3 + 2i) = (4 - (-3)) + (-2 - 2)\, i = 7 - 4i$.

3) Умножение:

Определение. Произведением комплексных чисел $z_1=x_1+y_1 i$ и $z_2=x_2+y_2 i$ называется комплексное число *z*, определяемое равенством:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

(осуществляется перемножение алгебраических двучленов и приведение подобных с учетом того, что $i^2 = -1$);

Числа z_1 и z_2 называются **сомножителями.**

Умножение комплексных чисел обладает следующими свойствами:

a) Коммутативность: $z_1z_2 = z_2 z_1$.

b) Ассоциативность: $(z_1z_2)z_3 = z_1 (z_2z_3)$

c) Дистрибутивность умножения относительно сложения:

$(z_1 + z_2)\, z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$.

Пример 4. Выполните умножение комплексных чисел z_1 *=(2 + 3i) и*

z_2 *= (5 – 7i).*

Решение:

I способ.

$z_1 * z_2 = (2 + 3i)*(5 - 7i) = (2\cdot 5 - 3\cdot(-7)) + (2\cdot(-7) + 3\cdot 5)i =$

$= (10 + 21) + (-14 + 15)i = 31 + i.$

II способ.

$z_1 * z_2 = (2 + 3i)*(5 - 7i) = 2\cdot 5 + 2\cdot(-7i) + 3i\cdot 5 + 3i\cdot(-7i) =$

$= 10 - 14i + 15i + 21 = 31 + i.$

4) Деление:

Определение. Разделить комплексное число z_1 на комплексное число z_2, значит найти такое комплексное число z, что $z \cdot z_2 = z_1$

Теорема. Частное комплексных чисел существует и единственно, если $z_2 \neq 0 + 0i$.

На практике частное комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

(эта операция возможна только в случае, когда $z_2 \neq 0 + i0 = 0$).

Пример 5. Вычислить $z = \frac{2-7i}{3+4i}$ и указать вещественную и мнимую части полученного комплексного числа.

Решение. Действуя в соответствии с правилами получаем:

$$z = \frac{2-7i}{3+4i} = \frac{(2-7i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{6-8i-21i+28i^2}{9-16i^2} = \frac{6-29i-28}{9+16} = \frac{-22-29i}{25} = -\frac{22}{25} - \frac{29}{25}i;$$

поэтому $\operatorname{Re} z = -\frac{22}{25}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{29}{25}$.

Практическая часть.

1. Решите уравнение и найдите комплексные корни уравнения:

а) $x^2 - 6x + 13 = 0;$

b) $9x^2 + 12x + 29 = 0$;

2. Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел

$z_1 = -2i + 7$ $z_2 = 8 - 3i$;

3. Вычислите значение комплексного числа: $(4 + 2i)^3$

4. Найти значение выражения $z^2 + 2z - 1$, где $z = 5 + 3i$

Контрольные вопросы:

1. Как обозначаются комплексные числа? Является ли число7 комплексным?
2. Какие формы представления комплексных чисел вам известны?
3. Какое правило нужно соблюдать при делении комплексных чисел в алгебраической форме?

Практическая работа № 2. Решение систем линейных уравнений различными методами

Цель: сформировать умение исследовать и использовать различные методы для решения систем линейных алгебраических уравнений.

Теоретическая часть.

Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ------------------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Решением системы (1) называется совокупность чисел (k_1, k_2, …, k_n), которая при подстановке в систему (1) вместо неизвестных обращает каждое уравнение системы в тождество. Система может иметь решение, тогда она называется *совместной*, причем, если решение единственное, *система определенная*, если решений множество – *система неопределенная*. Если система не имеет решений, она называется *несовместной*. Рассмотрим два способа решения системы: метод Крамера и метод Гаусса.

2. Метод Крамера

При решении методом Крамера используем определители n-го порядка. Пусть задана система (1). Составим главный определитель системы из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ -- & -- & -- & -- \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ТЕОРЕМА. Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то систему (3) можно решить по формуле Крамера, причем это решение единственное:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \qquad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \qquad \dots; \qquad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta},$$

где определитель Δx_i может быть получен из главного определителя путем замены i-го столбца на столбец из свободных членов.

Пример 1. $$.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

Составляем главный определитель, элементами которого являются коэффициенты при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

и три вспомогательных определителя:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix}; \qquad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}; \qquad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

Определитель Δx_1 составлен из определителя Δ путем замены элементов первого столбца свободными членами системы уравнений. В определителях $\Delta\, x_2$ и $\Delta\, x_3$ соответственно второй и третий столбцы заменены свободными членами. Вычислим все четыре определителя.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 5+12+21+10-21+6=33;$$

$$\Delta\, x_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 20+48+7+40-84+2=33;$$

$$\Delta\, x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -1+24+24-2-24+12=33;$$

$$\Delta\, x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -40+4+84+40-7-48=33.$$

Неизвестные x_1, x_2, x_3 находим по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \qquad x_1 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \qquad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta};$$

$$x_1 = \frac{33}{33} = 1; \qquad x_2 = \frac{33}{33} = 1; \qquad x_3 = \frac{33}{33} = 1.$$

Ответ: $x_1 = 1;$ $x_2 = 1;$ $x_3 = 1.$

Пример2. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение. Выписываем A - матрицу системы и B - столбец свободных членов:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$. Далее вычисляем определители:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2(16-4)-(-1)(12+16)-1(-6-12)=60 \neq 0;$$

$$|A|_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4(16-4)-(-1)(44+22)-1(-22-44)=180\,;$$

$$|A|_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 2(44+22)-4(12+6)-1(33-33)=60\,;$$

$$|A|_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 2(44+22)-(-1)(33-33)+4(-6-12)=60\,.$$

По теореме Крамера $x_1 = \frac{|A|_1}{|A|} = \frac{180}{60} = 3;$ $x_2 = \frac{|A|_2}{|A|} = \frac{60}{60} = 1;$ $x_3 = \frac{|A|_3}{|A|} = \frac{60}{60} = 1\,.$

Ответ: $x_1 = 3$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$.

Для проверки результата подставим полученные значения неизвестных в каждое уравнение системы: $2\cdot 3-1-1 \equiv 4$, $3\cdot 3+4\cdot 1-2\cdot 1 \equiv 11$, $3\cdot 3-2\cdot 1+4\cdot 1 \equiv 11$. Все уравнения обратились в тождества, значит, решение найдено верно.

Условия неопределенности и несовместности системы двух линейных уравнений с двумя переменными.

Если определитель системы $\Delta = 0$, то система является либо несовместной (когда $\Delta_{x_1} \neq 0$ и $\Delta_{x_2} \neq 0$), либо неопределенной (когда $\Delta_{x_1} = 0$ и $\Delta_{x_2} = 0$). В последнем случае система сводится к одному уравнению, а другое является следствием этого уравнения.

Условия несовместности системы двух линейных уравнений с двумя переменными можно записать в виде:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{в_1}{в_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

Условия неопределенности системы двух линейных уравнений с двумя переменными можно записать в виде:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{в_1}{в_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Если один из вспомогательных определителей отличен от нуля, то система уравнений (1) не имеет решения (если $\Delta = 0$).

Если главный и все вспомогательные определители равны нулю, то система (1) имеет бесконечно много решений.

Если главный определитель отличен от нуля, то система уравнений (1) имеет единственное решение.

3. Метод Гаусса

Эффективным методом решения и исследования систем линейных уравнений является метод последовательного исключения неизвестных, или метод Гаусса.

Идея метода Гаусса состоит в том, что данная система линейных уравнений преобразуется в равносильную ей систему специального вида, которая легко исследуется и решается.

Пример 3.

$$\begin{cases} 5x + 3y - z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}.$$

В результате элементарных преобразований добиваются того, чтобы в последнем уравнении системы осталось одно неизвестное (z), во втором – 2 неизвестных (y и z) а в первом – 3 неизвестных (x, y, z). За ведущее уравнение берется то, в котором коэффициент при x равен 1. Если такого уравнения нет, то его легко получить, разделив любое из уравнений системы на коэффициент при x.

Ведущим уравнением данной системы будет последнее. Перепишем систему так:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-3y+2z=9 \quad (2) \\ 5x+3y-z=7 \end{cases}$$

Умножаем первое уравнение на (-2) и складываем со вторым, чтобы избавиться от x во втором уравнении. Результат сложения записываем на месте второго уравнения. Далее первое уравнение умножаем на (-5) и складываем с третьим, чтобы избавиться от x в третьем уравнении. Результат записываем на месте третьего уравнения. Первое уравнение при этом переписываем без изменений. Получим:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ -7y-16z=2 \quad (3) \\ -7y-4z=7 \end{cases}$$

Системы уравнений (2) и (3) эквиваленты, т. е. они обе несовместны, или же обе совместны и имеют одни и те же решения.

Умножаем второе уравнение системы (5) на (-1) и складываем с третьим, чтобы избавиться от y в третьем уравнении. Первое уравнение при этом не трогаем. Результат записываем на месте третьего уравнения. Тогда

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ -7y-16z=2. \\ 12z=5 \end{cases}$$

Из последнего уравнения $z=\frac{5}{12}$. Подставляем это значение z во втрое уравнение системы и находим y:

$$-7y-16\cdot\frac{5}{12}=2$$

$$y=-\frac{26}{11}.$$

В первое уравнение подставляем значения z и y, получаем

$$x+2\cdot\left(-\frac{26}{11}\right)+3\cdot\frac{5}{12}=1$$

$$x=\frac{187}{84}.$$

Ответ: $x=\dfrac{187}{84}$; $y=-\dfrac{26}{11}$; $z=\dfrac{5}{12}$.

Рекомендуется сделать проверку.

3. Матричный способ

Систему можно решить и матричным способом.

Рассмотрим матрицу вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \qquad (4)$$

Составим матрицу системы из коэффициентов при неизвестных:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Из неизвестных x_1, x_2, x_3 и свободных членов составим матрицы – столбцы

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (4) в матричной форме примет вид

$$A\cdot X=B. \qquad (5)$$

Чтобы найти матрицу X, умножим (7) на A^{-1} слева.

$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$

Пример 4.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти обратную матрицу A^{-1}.

Решение.

1) Составляем и вычисляем определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-1+0+4+3-4-0=2.$$

Определитель вычислен по правилу треугольника.

2) Транспонируем матрицу. Получаем

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Вычисляем алгебраические дополнения

A_{11}; A_{12}; A_{13}; A_{21}; A_{22}; A_{23}; A_{31}; A_{32}; A_{33}.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \qquad M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5;$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-5) = -5.$$

Вычисляем A_{12}. Вычеркиваем первую строку и второй столбец. Составляем определитель второго порядка из оставшихся элементов.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4.$$

Вычисляем $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-4) = 4$.

Аналогично вычисляем все остальные алгебраические дополнения:

$$A_{13} = 7; \quad A_{21} = 2; \quad A_{22} = -2; \quad A_{23} = -2; \quad A_{31} = 1; \quad A_{32} = 0; \quad A_{33} = -1$$

Составим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 & 4 & 7 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & 2 & 7/2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Сделаем проверку:

$$E = A^{-1} \cdot A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 & 4 & 7 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 5.

Решить систему матричным способом

Хайминова Татьяна Сергеевна

$$\begin{cases} 5x + 3y - z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}.$$

Из коэффициентов при неизвестных составим матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Из неизвестных составим матрицу – столбец:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Из свободных членов составим матрицу – столбец:

$$B = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда система запишется в виде

$$A \cdot X = B.$$

Получили матричное уравнение. Умножаем обе части этого уравнения на A^{-1} слева. Получаем:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Находим обратную матрицу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 84; \qquad A^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 13 & 11 & -3 \\ 4 & -16 & 12 \\ -7 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$ (матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов; $$A^{-1} = \frac{1}{84} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 11 & -3 \\ 4 & -16 & 12 \\ -7 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$ (обратная матрица).

Умножая обратную матрицу на B, получаем матрицу X.

$$X = \frac{1}{84} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 11 & -3 \\ 4 & -16 & 12 \\ -7 & & 21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{84} \cdot \begin{pmatrix} 187/84 \\ -26/21 \\ 5/12 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем ответ:

$$x = \frac{187}{84}; \qquad y = -\frac{26}{21}; \qquad z = \frac{5}{12}.$$

Сравните решение этой системы с решением метода Гаусса.

Практическая часть.

1. Вычислите определители второго и третьего порядка. Сделайте проверку.

а) $\begin{vmatrix} -1 & -10 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 15 & 1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

2. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 3x - 4y = 18 \\ 2x + 5y = 19 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 5x - 2y = 7 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 6x_3 = 13 \end{cases}$

3. Решить систему уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса матричным методом:.

а) $\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 32 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

Контрольные вопросы:

1. Что такое определитель второго и третьего порядка. Где используется понятие определителя второго порядка?

2. Поясните, в чём состоит различие решения систем линейных уравнений метода Гаусса от метода Крамера.

Практическая работа № 3. Решение квадратных уравнений и неравенств. Метод интервалов.

Цель: научиться решать квадратные уравнения и неравенства методом интервалов.

Теоретическая часть.

Хайминова Татьяна Сергеевна

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, в котором a,b и c — действительные числа, и a≠0 , называется *квадратным уравнением*.

Если b = 0 или c = 0, или b=0 и c=0, то уравнения называются *неполными*.

Алгоритм решения уравнения

1. Неполные квадратные уравнения:

а) если c = 0, то уравнение примет вид: $ax^2 + bx = 0$.

Такое уравнение решается путем вынесения общего множителя за скобки: *x(ax + b) = 0.*

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один множитель равен нулю.

Пример 1. Решите квадратное уравнение $2x^2$+ 3x = 0 и найдите его корни.

Решение: Вынесем общий множитель за скобки и получим:

$2x^2$+ 3x = 0,

x(2x + 3) = 0,

x = 0 или 2x + 3 = 0,

x = -1,5

Ответ: -1,5; 0

б) если b=0, то уравнение примет вид: ax^2+ c = 0. Такое уравнение решается путем выражения x^2. Уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда выражение $-\frac{c}{a} > 0$.

Пример 2.

$3x^2$ -12 = 0

$x^2 = 4$ = 0

x = ±2

Ответ: ±2

в) если b=0 и c=0, тогда уравнение примет вид: ax^2= 0. В этом случае уравнение всегда будет иметь один корень: x=0.

2. Полное квадратное уравнение: x^2 + bx + c = 0

Хайминова Татьяна Сергеевна

Корни квадратного уравнения вычисляют по формуле дискриминанта: D= b^2−4ac.

Если D<0 (отрицательный), то уравнения **нет** действительных корней.

Если D=0, то уравнения два равных корня:

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$,

Если D>0 (положительный), то уравнение имеет один корень.

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Пример 3.

$2x^2$ + 3x + 5 = 0, a = 2, b = 3, c = 5

D= b^2−4ac

D= $3^2 - 4 * 2 * 5 = 9 - 40 = -31 < 0$ корней нет

Ответ: корней нет.

Пример 4.

$4x^2$ + 4x + 1 = 0, a = 4, b = 4, c = 1

D= b^2−4ac

D= $4^2 - 4 * 4 * 1 = 16 - 16 = 0 -$ один корнь

$x = \frac{-b}{2a}$ = -0,5

Ответ: -0,5.

Пример 5.

$2x^2 + 3x - 5 = 0, a = 2, b = 3, c = -5$

D= b^2−4ac

D= $3^2 - 4 * 2 * (-5) = 9 - (-40) = 49 > 0 -$ два корня

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = 1$;

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = -2{,}5$, Ответ: -2,5; 1,

Неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ (ax^2 + bx + c≥0; ax^2+ bx + c < 0; ax^2 + bx + c ≤ 0), где a, b, c некоторые числа (a ≠0) – называется *квадратным*.

Алгоритм решения квадратных неравенств:

1. Привести неравенство к виду: $ax^2 + bx + c > 0$ (ax^2 + bx + c≥0; ax^2 + bx + c < 0; ax^2+ bx + c ≤ 0). Для этого перенести слагаемые из правой части в левую, поменяв знак слагаемых на противоположный (знак неравенства при этом не меняется).

2. Привести подобные слагаемые (если они есть).

3. Приравнять к нулю и решить полученное квадратное уравнение (смотри опорный конспект для решения квадратных уравнений).

4. Найденные корни выставить на координатный луч (если знак неравенства строгий, то точка выколотая, если знак неравенства не строгий, то точка жирная).

5. Расставить знаки, начиная с крайнего правого, для этого нужно посмотреть на знак главного коэффициента (если он больше нуля, то ставим плюс, если меньше нуля, то минус).

Дальше знаки чередуются, если нет четного корня (четный корень получается, если при решении квадратного уравнения получаются одинаковые корни).

6. Выбрать нужные промежутки (если мы решаем неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ или ax^2 + bx + c≥0, то выбираем знаки «+», если неравенства ax^2+ bx + c < 0 или ax^2 + bx + c ≤ 0, то выбираем знаки «-».

7. Записать ответ в виде неравенства или промежутков.

*Пример 6.*Решить неравенство: $2x^2-7x-4\le 0$.

Решение. Найдём корни квадратного трёхчлена $2x^2-7x-4$ и разложим его на множители по формуле ax^2+bx + c=a(x−x1)(x−x2): $2x^2-7x-4=0$;

D=b^2−4ac=$(-7)^2$−4·2·(−4)=49+32=81;

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = 4$;

$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=-0{,}5$,

$2x^2$−7x−4=2(x+0,5)(x−4);

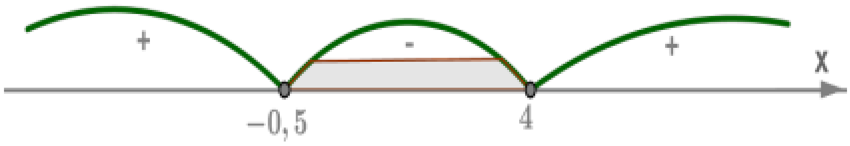
2(x+0,5)(x−4)=0|:2

(x+0,5)(x−4)=0;

x1=−0,5, x2=4.

Отметим на числовой прямой корни и найдём знаки квадратного трёхчлена на каждом интервале.

Для этого из каждого интервала достаточно взять произвольно по одному значению и подставить вместо x в трёхчлен.



На интервале (−∞;−0,5] возьмём x=−2, тогда 2·(−2)2−7·(−2)−4=2·4+14−4=18>0.

На интервале [−0,5;4] возьмём x=0, тогда 2·02−7·0−4=0−0−4=−4<0.

На интервале [4;+∞) возьмём x=5, тогда 2·52−7·5−4=2·25−35−4=50−39=11>0.

Квадратный трёхчлен принимает отрицательные и равные нулю значения на интервале [−0,5;4].

Ответ: −0,5≤x≤4.

Практическая часть.

Вариант №1

1. Решить квадратные уравнения:

а) $x^2=3+2x$

б) $-2x^2+4x-5=0$ с) $x^2-2x+1=0$

2. Решить квадратные неравенства методом интервалов:

а) $x^2+2x-1>0$ б) $-x^2+3x+4\le 0$

3. Решить неравенства методом интервалов

а) $(2x+3)(6-3x)*x^3 \le 0$

б) $\dfrac{x(6-x)(5+x)^4}{(1-x)} \ge 0$

Вариант №2

1. Решить квадратные уравнения:

а) $x^2 = 3x$ б) $x^2 - 4x - 5 = 0$ с) $4x + x^2 + 15 = 0$

2. Решить квадратные неравенства методом интервалов:

а) $x^2 - 6x + 9 < 0$ б) $-x^2 + 2x + 15 \ge 0$

3. Решить неравенства методом интервалов

а) $-(2x+3)(5-3x)*x^8 \le 0$

б) $\dfrac{x^5(6-x)(7+x)^4}{(4+x)} < 0$

Вариант №3

1. Решить квадратные уравнения:

а) $x^2 = 3x - 6$

б) $x^2 + 2x + 5 = 0$ с) $5x - 2x^2 + 6 \le 0$

2. Решить квадратные неравенства методом интервалов и графически:

а) $x^2 + 3x + 6 < 0$ б) $3x^2 + 5x - 4 \le 0$

3. Решить неравенство методом интервалов

а) $(4x-1)(8-5x)*x^{12} \ge 0$

б) $\dfrac{x^{11}(9-x)(4+x)^4}{(1-x)^2} < 0$

Практическая работа № 4. Решение рациональных и иррациональных уравнений и неравенств

Цель: научиться решать иррациональные уравнения и неравенства, используя основные определения и алгоритм для решения иррациональных уравнений и неравенств.

Хайминова Татьяна Сергеевна

Теоретическая часть.

Уравнение A(x) = B(x) называется *иррациональны*м, если хотя бы одно из выражений A(x) или B(X) иррационально.

Так, иррациональными являются уравнения $\sqrt{x-2}=2x-1$; $\sqrt[3]{x-1}=2$; $\sqrt[4]{x-5}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{7-x}$

Один из основных методов решения иррациональных уравнений – метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень. Отметим, что уравнение $A^n(x) = B^n(x)$ при *n* чётном является следствием уравнения A(x) = B(x), а при *n* нечётном равносильно уравнению A(x) = B(x). Следовательно, при возведении обеих частей уравнения в чётную степень возможно появление посторонних корней и поэтому необходима *проверка* корней.

1. Метод возведения в степень с уединением радикала.

Этот метод применяется при решении уравнений, содержащих как один, так и несколько радикалов с натуральными показателями степени. Особое внимание уделим уравнениям с радикалами чётной степени.

Иррациональное уравнение $\sqrt[2n]{f(x)} = \gamma(x)$

Равносильно системе $\begin{cases} \gamma(x) \ge 0 \\ f(x) = \gamma^{2n}(x) \end{cases}$

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x^2-3x+1}+1=x$

Решение: $\sqrt{x^2-3x+1}=x-1$ *Уравнение равносильно системе*

$$\begin{cases} x \ge 1, \\ x^3 - 3x + 1 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, \\ x(x^2 - x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, \\ x = 0, \\ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}5\times(1\pm\sqrt{5}) \\ x = 0{,}5\times(1+\sqrt{5}) \end{cases}$$

Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{5x+7}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+3}$

Решение: $\begin{cases} 5x+7 \ge 0, \\ 3x+1 \ge 0, \\ x+3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{7}{5}, \\ x \ge -\frac{1}{3}, \\ x \ge -3 \end{cases}$ *т.е. Д* $= \left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$

Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{5x+7} = \sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1},$$

т.к. обе части уравнения неотрицательны, возведём обе части в квадрат.

$$5x+7 = x+3+2\sqrt{(x+3)(3x+1)}+3x+1,$$

$$2\sqrt{3x^2+10x+3} = x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \ge 0, \\ 12x^2+40x+12 = x^2+6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3, \\ 11x^2+34x+3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3, \\ \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{11} \\ x = -3 \end{array}\right. \end{cases}$$ *не принадлежит Д*

Ответ: $-\frac{1}{11}$

2. Метод возведения в степень без уединения радикала.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x}=\sqrt{6}$

Решение: Уравнение равносильно системе

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3+2\sqrt{(x-3)(7-x)}+7-x = 6, \\ x-3 \ge 0, \\ 7-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-3)(7-x)} = 1, \\ x \ge 3, \\ x \le 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(7-x)=1, \\ 3 \le x \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-10x+22=0, \\ 3 \le x \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5\pm\sqrt{3}, \\ 3 \le x \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow x=5\pm\sqrt{3}$$

Ответ: $5\pm\sqrt{3}$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{x-4}=\sqrt[3]{3x-8}$. **(1)**

Решение: Возведём обе части уравнения в куб:

$$\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{x-4}=\sqrt[3]{3x-8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-2-3(\sqrt[3]{x-2})^2\cdot\sqrt[3]{x-4}+3\cdot\sqrt[3]{x-2}(\sqrt[3]{x-4})^2 - x + 4 = -3x+8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x-2}\cdot\sqrt[3]{x-4}(\sqrt[3]{x-4}-\sqrt[3]{x-2})=-x+2.$$

Заменим разность $\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{x-4}$ на $\sqrt[3]{3x-8}$ (в силу уравнения (1)). Получим уравнение

$$\sqrt[3]{x-2}\cdot\sqrt[3]{x-4}\cdot\sqrt[3]{3x-8}=2-x$$

(2)

Заметим, что это, вообще говоря, уже не равносильный переход!

Это уравнение является лишь **следствием** заданного уравнения: если $x = x_0$ – корень уравнения (1), то $x = x_0$ будет корнем и нового уравнения, но если $x = x_1$ – корень нового уравнения, то это не значит, что $x = x_1$ является корнем уравнения (1), потому, что в новом уравнении нет связи между сомножителями, заданной исходным уравнением (1).

Решим получившееся уравнение:

$$(x-2)(x-4)(3x-8) = -(x-2)^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ (x-3)^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=3. \end{array}\right.$$

***Проверка** (т.к. в одном месте не было равносильности!) показывает, что x = 2 является единственным корнем уравнения.*

Ответ: 2

3. Уравнения, в которых одно или несколько подкоренных выражений является полным квадратом.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-10x+25}=10.$

Решение: Данное уравнение равносильно

$$|x+2|+|x-5|=10.$$

выделим три промежутка: $(-\infty,-2),[-2,5),[5,+\infty)$.

1. Промежуток $(-\infty,-2)$. Здесь оба подмодульных выражения x +2 и x – 5 отрицательны, поэтому уравнение принимает вид – (x+2) – (x-5) = 10 $\Leftrightarrow$

2x = 7 $\Leftrightarrow$ x = - 3,5.

Так как – 3,5 $\in$ $(-\infty,-2)$, то x = - 3,5 – корень исходного уравнения.

2. Промежуток $[-2,5)$. Здесь x + 2 $\geq$ 0, а x - 5 < 0, поэтому уравнение принимает вид x +2 – (x – 5) = 10 $\Leftrightarrow$ 7 = 10 - ложно.

Следовательно, на этом промежутке уравнение решений не имеет.

3. Промежуток $[5,+\infty)$. Здесь x + 2 > 0 , а x – 5 $\geq$ 0, поэтому уравнение принимает вид x + 2 + x – 5 = 10 $\Leftrightarrow$ 2x = 13 $\Leftrightarrow$ x = 6,5.

Так как 6,5 $\in$ $[5,+\infty)$, то x = 6,5 – корень исходного уравнения.

Ответ: - 3,5; 6,5

4. Умножение левой и правой части на сопряжённое выражение.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}$ = 2

Решение: Умножим обе части уравнения на выражение, сопряжённое левой части уравнения:

$\left(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}\right)\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)=2\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$ или

$1+x+x^2-(1-x+x^2)=2\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$, или $\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}=x$ (*)

Уравнение (*) вместе с исходным решаем как систему способом сложения:

$$\begin{cases}\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}=2\\ \sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}=x\end{cases}$$

Получим $2\sqrt{1+x+x^2}=2+x$, или $4(1+x+x^2)=4+4x+x^2;\quad 4x^2-x^2=0;$ $3x^2=0,$ откуда $x=0$.

Проверка показывает, что x=0 – корень исходного уравнения.

Ответ: 0

Пример 2. Решите уравнение:

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}.$$

Указание. Область определения уравнения $x\ge-\frac{1}{2},$ при таких x мы можем применить формулу $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}.$ Поэтому перепишем уравнение так: $\left(\sqrt{2x-1}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x+2}\right)=4.$ Домножив левую и правую части на разность $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2},$ получим

$$\sqrt{2x-1}-3=\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}.$$

Осталось возвести в квадрат, а затем найти и проверить корни.

Ответ: 7

Практическая часть.

Вариант №1

1. Решить рациональные уравнения:

а) $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}=\frac{4-x}{x^2+2x}$ б) $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}=\frac{5}{2}$

2. Решить рациональные неравенства

а) $\frac{x^3-7x}{(2x+3)(3x-8)}\ge 0$ б) $\frac{x^2-10x-21}{1+x^2-2x}>0$

3. Решить иррациональные уравнения

а) $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}$ б) $\sqrt{x^2-9}=3x-11$

4. Решить иррациональные неравенства

а) $\sqrt{4-x^2}>-20$ б) $\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1$

5. Какие неравенства называются рациональными? Методика решения.

Вариант №2

1. Решить рациональные уравнения:

а) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}=\frac{6}{x+2}$ б) $\frac{x^2-1}{x+3}-\frac{x^2+1}{x+4}=\frac{1}{x^2+7x+12}$

2. Решить рациональные неравенства

а) $\frac{x^3-6x^2}{5x^2-x-6}<0$ б) $\frac{x^4-4x^2}{x^2-25}\ge 0$

3. Решить иррациональные уравнения

а) $\sqrt{x+2}=\sqrt{6-x}$ б) $\sqrt{1-x}=5+x$

4. Решить иррациональные неравенства

а) $\sqrt{4x+1}>7$ б) $\sqrt{7+x}<\sqrt{x+6}$

5. Что такое область определения функции? Примеры.

Вариант №3

1. Решить рациональные уравнения:

а) $\frac{2}{(x-1)}-\frac{1}{(x+1)}=\frac{4-x}{x^2-1}$ б) $\frac{1}{x^2+3x-3}+\frac{2}{x^2+3x+1}=\frac{7}{5}$

2. Решить рациональные неравенства

а) $\frac{x^3-4x}{(5x+3)(3x-7)}\ge 0$ б) $\frac{9+x^2-6x}{1+x^2-2x}<0$

3. Решить иррациональные уравнения

а) $\sqrt{4x^2-9}=4$ б) $\sqrt{2x}=1-x$

4. Решить иррациональные неравенства а) $\sqrt{16-x^2}>-10$ б) $\sqrt{x^2+5x+3}<\sqrt{x}$

5. Что такое область значений функции? Примеры.

Практическая работа № 5. Решение показательных уравнений и неравенств.

Цель: научиться решать показательные уравнения и неравенства.

Теоретическая часть.

Определение. Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называют *показательной функцией*.

Основные свойства показательной функции y = a^x

Свойство	$a > 1$	$0 < a < 1$
Область определения	$D(f) = (-\infty; +\infty)$	$D(f) = (-\infty; +\infty)$
Область значений	$E(f) = (0; +\infty)$	$E(f) = (0; +\infty)$
Монотонность	Возрастает	Убывает
Непрерывность	Непрерывная	Непрерывная

График функции **$y=a^x$** для **$a>1$** изображен на рис. 201, а для **$0<a<1$** — на рис. 202. Кривую, изображенную на рис. 201 или 202, называют экспонентой. На самом деле математики экспонентой обычно .называют саму показательную функцию $y=a^x$. Так что термин «экспонента» используется в двух смыслах: и для наименования показательной функции, и для названия графика показательной функции. Обычно по смыслу бывает ясно, идет речь о показательной функции или о ее графике.

Обратите внимание на геометрическую особенность графика показательной функции y=ах: ось х является горизонтальной асимптотой графика. Правда, обычно это утверждение уточняют следующим образом.

Ось х является горизонтальной асимптотой графика функции

$y = a^x$ *при* $x \to -\infty$, *если* $a > 1$ *и при* $x \to +\infty$, *если* $0 < a < 1$

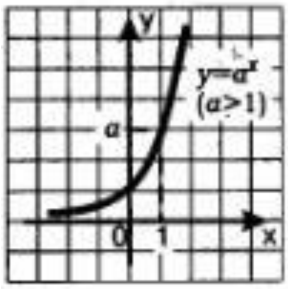


Рис. 201

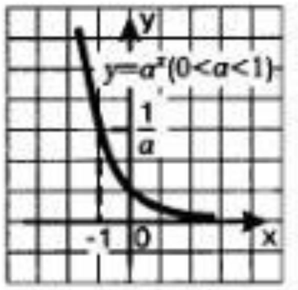


Рис. 202

Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнения вида $\boldsymbol{ax} = \boldsymbol{ab}$, где $\boldsymbol{a} > 0$, $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{1}$, х – неизвестное.

Показательным называется уравнение, в котором переменная входит только в показатели степеней, при заданном основании.

Уравнения вида

$a^{f(x)} = b$, $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(\mathrm{a} > 0, \mathrm{a} \neq 1)$

называются **простейшими показательными уравнениями**.

В самом простом случае уравнение принимает вид: $a^x = b$.

Так как множество значений показательной функции $f(x) = a^x$ - множество положительных чисел, то при $b \leq 0$ уравнение решений не имеет.

Теорема 1. Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Помимо этого, полезно помнить об основных формулах и действиях со степенями:

$$\begin{aligned}
&a > 0,\ b > 0:\\
&a^0 = 1, 1^x = 1;\\
&a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}\ (k \in Z,\ n \in N);\\
&a^{-x} = \frac{1}{a^x};\\
&a^x \cdot a^y = a^{x+y};\\
&\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};\\
&(a^x)^y = a^{xy};\\
&a^x \cdot b^x = (ab)^x;\\
&\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x.
\end{aligned}$$

Пример 1. Решить уравнение $3^{\mathrm{x}} = 27$.

Решение: Представим 27 как 3^3. Наше показательное уравнение имеет одинаковое основание 3.

$$3^3 = 3^3$$

Данное уравнение равносильно уравнению: x=3.

Ответ: 3.

Показательными называются неравенства, в которых неизвестная переменная содержится только в показателях каких-либо степеней.

Для решения *показательных неравенств* требуется знание следующей теоремы:

Теорема 2. Если $a > 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того же смысла: $f(x) > g(x)$. Если $0 < a < 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла: $f(x) < g(x)$.

При решении простейших показательных неравенств $\boldsymbol{af(x)} \le \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{af(x)} \ge \boldsymbol{b}$, используется монотонность показательной функции: при $0 < a < 1$ функция убывающая, при $a > 1$ – возрастающая. Поэтому при рассмотрении показателей степеней в первом случае знак неравенства меняется на противоположный, а во втором – сохраняется.

Пример 2. Решение простейших показательных неравенств $3^x < 81$

Решение: преобразуем правую часть неравенства $3^x < 81$ представим 81 как 3^4. Получим неравенство вида:

$3^x < 3^4$

Так как 3>1, то функция $y = 3^x$является возрастающей, значит знак неравенства сохраняется: x<4.

Ответ: $x \in (-\infty; 4)$

Пример 3. Решить показательное неравенство заменой переменной

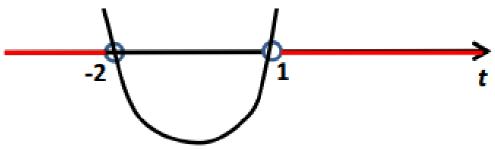
16x+4x- 2 >0

Решение:

Пусть $4^x = t$, t>0, тогда уравнение примет вид:

$t^2 + t - 2 > 0$. Получим квадратное неравенство.

Решим данное неравенство методом интервалов:



Так как $4^x = t$, то получим два неравенства:

$4^x < -2$ и $4^x > 1$

$4^x < -2$ Не имеет решений, т.к. $4^x > 0$, при всех $x \in$ R

Ответ: $x \in (0; +\infty)$

Практическая часть.

Вариант №1.

1. Решите показательные уравнения

а) $\sqrt{9^x} = (3)^{-2}$ б) $7^{\frac{x-3}{2}} = 49^{\frac{x+1}{2}}$

с) $27 * 3^{4x-9} - 9^{x+1} = 0$

2. Решите показательные неравенства

а) $4^{1-x} - 4^{x} \geq 5$ б) $(\frac{1}{3})^{x} \leq (\frac{1}{9})^{-x-1}$

3. Какие методы вам известны применяемые для решения показательного уравнения?

Вариант №2

1. Решите показательные уравнения

а) $\sqrt{8^{2x}} = (2)^{-4}$ б) $(\frac{1}{4})^{x-3} = 16^{-2x-1}$

с) $2^{2x+1} - 5*2^{x} - 88 = 0$

2. Решите показательные неравенства

а) $5^{x} + 5^{1-x} \geq 6$ б) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} > \left(\frac{5}{2}\right)^{x+2}$

3.На, что необходимо обязательно обратить внимание при решении показательного неравенства?

Вариант № 3

1. Решите показательные уравнения

а) $\sqrt{5^{2x+1}} = 125$ б) $\frac{1}{3}^{\frac{x+1}{2}} = 81^{\frac{(x-2)}{4}}$

с) $2^{2+x} - 2^{2-x} = 5$

2. Решите показательные неравенства

а) $(\frac{1}{9})^{x^2-2x} < 1$ б) $10^{x^2+2x-1} \leq 10^{2x^2}$

3. Запишите алгоритм решения показательного неравенства, и приведите пример.

Хайминова Татьяна Сергеевна

Практическая работа № 6. Действия со степенями.

Цель: повторить и закрепить умение работать со степенями.

Теоретическая часть.

Квадратным корнем из числа ***a*** называют такое число, квадрат которого будет равен ***a***

Арифметическим квадратным корнем из числа а называют неотрицательное число, квадрат которого равен ***a***

Кубический корень из ***a*** – это такое число, которое при возведении в третью степень дает число ***a***

Корнем n-ой степени из числа ***a*** называют такое число, *n*-ая степень которого будет равна ***a***

Арифметическим корнем натуральной степени, где $n \geq 2$, из неотрицательного числа ***a*** называется неотрицательное число, *n*-я степень которого равна *a*.

Обозначается: $\sqrt[n]{a}$. Число n называется показателем корня, ***a*** само число *a*. - подкоренным выражением, b – результат возведения числа *a в n*-ной степень.

т.е. $$\sqrt[n]{a} = b$$
$$b^n = a, где\ \ a \geq 0, b \geq 0$$

Свойства арифметического корня

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Пример1:

$\sqrt[4]{16 \cdot 625} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{625} = 2 \cdot 5 = 10$.

$\sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[5]{9} = \sqrt[5]{27 \cdot 9} = \sqrt[5]{243} = 3$.

2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Пример:

$$\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

$$\frac{\sqrt[5]{288}}{\sqrt[5]{9}} = \sqrt[5]{\frac{288}{9}} = \sqrt[5]{32} = 2.$$

3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

Пример. $(\sqrt[4]{2})^8 = \sqrt[4]{2^8} = \sqrt[4]{256} = 4$

4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, где $a \geq 0$, $b \geq 0$, $m \geq 2$, $n \geq 2$, $m \in N$, $n \in N$.

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{729}} = \sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{3^6} = 3$$

5) $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$, где $k \in N$

6) $\sqrt[mk]{a^{nk}} = \sqrt[m]{a^n}$

Замечание:

1. При четном n существуют два корня n-й степени из любого положительного числа ***a***;
2. Корень n-й степени из числа 0=0;
3. Корней четной степени из отрицательных чисел не существует!
4. При отрицательном n имеем один корень (отрицательный).
5. Для корней нечетной степени справедливо равенство:

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$

Примеры:

1) $\sqrt[3]{27}$*=27 (т.к.* $3^3 = 27$ *)- корень нечетной степени*

2) $\sqrt[6]{64} = 64(\text{т.к.}\, 2^6 = 64)$*- корень четной степени*

3) $\sqrt[3]{-8} = -2\ (\text{т.к.}\, (-2)^3 = -8)$*- не является арифметическим корнем*

Хайминова Татьяна Сергеевна

Практическая часть.

Вариант №1

1. Найдите значение выражения

а) $\frac{4^5 * 8^{11}}{32^6}$ б) $\frac{10^5}{2^6 * 5^7}$ в) $\frac{12^5}{2^2 * 3^4} * \frac{10^5}{2^6 * 5^7}$

2. Извлеките корень

а) $\sqrt[3]{8a^3 * c^{\frac{1}{3}}}$ б) $4\sqrt{16c^8}$

3. Вычислите

а) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$-5^{-1}+$\frac{7^{-2}}{49^{-1}}$+$(\sqrt{8})^6$

Представьте в виде суммы

б) $(a^{\frac{1}{3}} + 3b^{\frac{2}{3}})^3$ с) $(a^{\frac{1}{2}} - b^2)^3$

4. Упростить выражение

$\sqrt{18a^4b^{-2}}$:($\left(\frac{a^6}{2b^{-4}}\right)^{-\frac{1}{2}}$)$^{-1}$

5. Перечислите свойства степени с натуральным показателем. Приведите примеры

Вариант №2

1. Найдите значение выражения

а) $\frac{63^{10}}{3 * 9^9 * 7^8}$ б) $\frac{2^8 * 9^9}{18^7}$ в) $\frac{24^{12} * 4}{4^{10} * 6^{11} * 6}$

2. Извлеките корень

а) $\sqrt[4]{256x^{16}z^{20}}$ б) $\sqrt[6]{y^{12}z^{18}}$

3. Вычислите

а) $(\frac{1}{49})^{(-\frac{1}{2})}$-$2^3$+$\frac{4}{\sqrt{196}}$ -$\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$

Представьте в виде суммы

б) $(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{5}})^3$ с) $(a^{-\frac{2}{3}} + 3b^2)^3$

4. Упростить выражение

$\sqrt{18a^4b^{-2}}$:$((\frac{a^6}{2b^{-4}})^{-\frac{1}{2}})^{-1}$

5. Охарактеризуйте понятие степени с натуральным показателем и приведите примеры

Вариант №3

1. Найдите значение выражения

а) $\frac{2^8*7^9}{14^{10}}$ б) $\frac{26^5*2^{10}}{13^6*8^4}$ в) $\frac{28^5*2^3}{14*2^7}$

2. Извлеките корень

а) $\sqrt[3]{27а^3в^{12}}$ б) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}а^6}$

3. Вычислите

а) $(\frac{1}{36})^{(-\frac{1}{2})}$-$6^{-1}$+$\frac{2}{6^{-1}}$+$(\sqrt{6})^4$-$6^0$

4. Упростить выражение

$\sqrt{12a^{-4}b^3}$:$((\frac{a^3}{3b^{-4}})^{-2})^{\frac{1}{4}}$

5. Дайте определение арифметического корня. Перечислите свойства арифметических корней

Практическая работа № 7. Вычисление логарифмов с использованием свойств

Цель: научиться вычислять значение логарифмических выражений, применяя знания основных свойств логарифмов.

Теоретическая часть.

Определение. *Логарифмом* числа b по основанию α ($\log_\alpha$ b) – показатель степени, в которую надо возвести α , чтобы получить b:

$\log_\alpha b = \mathrm{c} \Leftrightarrow \alpha^{\mathrm{c}} = \mathrm{b}$

ОДЗ: $\alpha > 0, \alpha \neq 1, b > 0$

Основное тригонометрическое тождество:

$$\boldsymbol{\alpha^{\log_\alpha b} = b}$$

Свойства логарифмов:

При условии, что $\alpha, b, c > 0, \alpha \neq 1$

1) $\log_a a = 1$

2) $\log_a 1 = 0$

3) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$

4)

5) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

6) $\log_a b^P = p \times \log_a b$

7) $\log_{\boldsymbol{\alpha}^k} b = \frac{1}{k} \times \log_a b$

8) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}; \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

Логарифмическая функция:

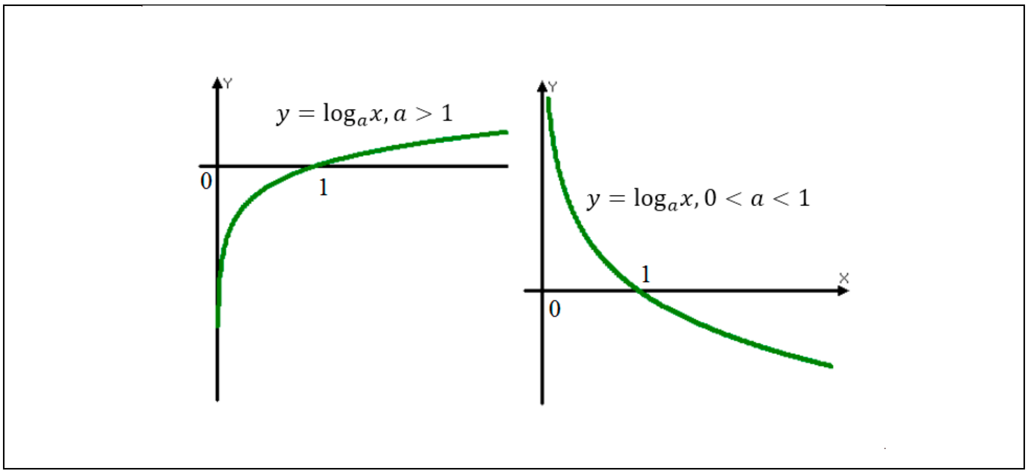
$y = \log_a x$, ОДЗ: $\alpha > 0, \alpha \neq 1$

1) D(y): x∈(0: +∞)-область определения(значения, которые принимает X)

2) E(y): y∈R – область значений (значения, которые принимает функция Y)

3) График

При α >1: Функция $y = \log_a x$ возрастающая	При 0< α <1: Функция $y = \log_a x$ убывающая



Определение. Уравнение вида $\log_a x = b, \quad \alpha > 0, a \neq 1$называют пройтейшим *логарифмическим уравнением.*

Способы решения:

1. По определению логарифма: x=α^b
2. Графически.

Практическая часть.

Вариант №1

1.Найти значение выражение

а) $49^{\log_7 8}$ б) $9 - \log_3 9$

2. Упростите выражение, пользуясь основным логарифмическим тождеством

а) $10^{-2lg\frac{1}{3}}$; б) $4^{2+\frac{1}{\log_3 4}}$; в) e^{2ln4};

3. Вычислите

а) $\frac{\log_3 2+\log_3 4}{3\log_3 2}$; б) $\log_4 sin^2 2 + \log_4 cos^2 2$;

4. Упростите и вычислите

а) $81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}$; б) $(2\log_{12} 2 + \log_{12} 3)(2\log_{12} 6 - \log_{12} 3)$;

Вариант №2

1. Найти значение выражения

а) $1-\log_5\frac{1}{125}$ б) $8-4^{\log_4 7}$;

2. Упростите выражение, пользуясь основным логарифмическим тождеством

а) $8^{2-\log_3 8}$; б) $12^{-1-\log_{12} 2}$; в) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2\log_{\frac{1}{4}} 6}$;

3. Вычислите

а) $\frac{\log_6 32}{\log_6 2}$; б) $\log_3 sin^2 3+\log_3 cos^2 3$;

4. Вычислите

а)-2lglg$\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$; б) $36^{\frac{1}{\log_3 6}}+\frac{1}{125}^{\log_5 2}$;

Практическая работа № 8. Решение логарифмических уравнений и неравенств

Цель: познакомиться с основными видами логарифмических уравнений и неравенств и способами их решения.

Теоретическая часть.

Решение любого логарифмического уравнения предполагает переход от логарифмов к выражениям, стоящим под знаком логарифмов. Однако это действие расширяет область допустимых значений уравнения и может привести к появлению посторонних корней. *Чтобы избежать появления посторонних корней*, можно поступить одним из трех способов:

1. **Сделать равносильный переход** от исходного уравнения к системе, включающей область допустимых значений уравнения:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

в зависимости от того, какое неравенство f(x)>0 или g(x)>0 проще.

Если уравнение содержит неизвестное в основании логарифма:

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$$

то мы переходим к системе:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ a(x) > 0 \\ a(x) \neq 1 \end{cases}$$

Пример:

Решите уравнение:

$$\log_{x-1} 8 = 1$$

Решение:

Представим 1 в правой части уравнения в виде логарифма по основанию x-1:

$$\log_{x-1} 8 = 1$$

$$1 = \log_{x-1} x - 1 \text{ или } 1 = (x-1)^1 = x - 1.$$

$$\log_{x-1} 8 = \log_{x-1} x - 1$$

Основания равны, значит приравниваем выражения, стоящие под знаком выражения:

8=x-1

x=7

2. **Отдельно найти область допустимых значений уравнения**, затем решить уравнение и проверить, удовлетворяют ли найденные решения ОДЗ уравнения.

3. **Область допустимых значений** алгебраического выражения (сокращенно **ОДЗ**) - это множество значений переменной, при которых это выражение определено.

Функция	**ОДЗ**
Выражение, стоящее под знаком корня четной кратности, должно быть больше или равно нулю. $\sqrt[2n]{\mathrm{f(x)}}$	$\mathbf{f(x) \geq 0}$
Выражение, стоящее в знаменателе дроби, не может быть равно нулю. $y = \frac{1}{\mathrm{f(x)}}$	$\mathrm{f(x)} \neq 0$
Выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть строго больше нуля; выражение, стоящее в основании логарифма должно быть строго больше нуля и отлично от единицы. $\mathbf{log_{f(x)}g(x)}$	$\begin{cases} \mathrm{f(x)} > 0 \\ \mathrm{f(x)} \neq 1 \\ \mathrm{g(x)} > 0 \end{cases}$
Степень корня - натуральное число, отличное от 1. $\sqrt[x]{\boldsymbol{a}} = a^{\frac{1}{x}}$	x ϵ N, $\mathrm{x} \neq 0$

4. Решить уравнение, и потом *сделать проверку***:** подставить найденные решения в исходное уравнение, и проверить, получим ли мы верное равенство.

Все логарифмические уравнения можно условно разделить на четыре типа:

I. Уравнения, которые содержат логарифмы только в первой степени. Они с помощью преобразований и использования свойств логарифмов приводятся к виду:

$$\log_{\mathrm{a(x)}}\mathrm{f(x)} = \log_{\mathrm{a(x)}}\mathrm{g(x)}$$

Пример:

$$\log_4(\mathrm{x}+3) - \log_4(\mathrm{x}-1) = 2 - \log_4 8$$

Решение:

1)Выпишем ОДЗ:

$$\begin{cases} x+3>0 \\ x-1>0 \end{cases}$$

Примечание: всегда ищем ОДЗ исходного уравнения, а не того, которое получится в процессе преобразований. То есть ОДЗ записываем перед тем, как переходим к решению уравнения.

2) Для упрощения вычислений давайте перенесем логарифмы с отрицательными коэффициентами в противоположную часть уравнения - из соображений, что умножать проще, чем делить:

$$\log_4(x+3)+\log_4 8 \ = 2+\log_4(x-1)$$

Представим 2 в виде логарифма по основанию 8:

$$2 = 2\log_4 4 = \log_4 4^2 = \log_4 16$$

Получим уравнение:

$$\log_4(x+3)+\log_4 8 \ = \log_4 16+\log_4(x-1)$$

Воспользуемся свойствами логарифма:

Логарифм суммы: $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$

$$\log_4((x+3)*8) \ = \log_4(16*(x-1))$$

Основания равны, значит приравниваем выражения, стоящие под знаком выражения:

$$(x+3)*8 = 16*(x-1)$$

$$x=5$$

3) Проверим, удовлетворяет ли наш корень ОДЗ уравнения:

$$\begin{cases} x+3>0 \\ x-1>0 \end{cases} \begin{cases} 5+3>0 \\ 5-1>0 \end{cases} \begin{cases} 8>0 \\ 4>0 \end{cases}$$

Корень уравнения найден верно.

Ответ: x=5

Практическая часть.

Вариант №1

1. Решите логарифмические уравнения

а) $\log_3 x=\log_3(1{,}5+x)+\frac{1}{\log_8 3}$

б) $\log_5(x+1)+\log_5(2x+3)=1$

в) $\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$,

2. Решите логарифмические неравенства

а) $\log_3(12-2x-x^2)>2$

б) $\log_{\frac{1}{5}}(4x+6) \le \log_{\frac{1}{5}} 2x$

в) $\log_{\frac{1}{3}}(2+x) > \log_{\frac{1}{3}}(1+2x)$

Вариант №2

1. Решите логарифмические уравнения

а) $\log_3(4x-5)=\frac{1}{\log_8 3}+\log_3(1-3x)$

б) $\lg(x-6)-\lg 2=\lg 3+\lg(x-10)$

в) $\log_2^2(x-1)^2-3\log_2(x-1)-1=0$

2. Решите логарифмические неравенства

а) $\log_4(x+1)+\log_4 x<\log_4 2$ б) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)<2$

в) $\lg^2(x^2)-15\lg(x)+2\le 0$

Практическая работа № 9. Решение задач на применение основных тригонометрических тождеств

Цель: формирование навыков использования основных тригонометрических тождеств при преобразовании выражений.

Теоретическая часть.

Основные тригонометрические тождества:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$
$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Пример 1. Известно, что $\sin t = -\frac{3}{5}$, причем $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$. Найти $\cos t, tgt, ctgt$.

Решение:

$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$. Подставляя в эту формулу вместо $\sin t$ его значение, получим:

$$\cos^2 t = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

Итак, $\cos^2 t = \frac{16}{25}$, значит, либо $\cos t = \frac{4}{5}$, либо $\cos t = -\frac{4}{5}$.

По условию $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$, то есть аргумент t принадлежит 3 четверти. Но в 3 четверти косинус отрицателен, значит, из двух указанных выше возможностей выбираем одну: $\cos t = -\frac{4}{5}$.

Зная $\sin t$ и $\cos t$, находим tgt и $ctgt$:

$$tgt = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}, ctgt = \frac{4}{3}.$$

Ответ. $\cos t = -\frac{4}{5}, tgt = \frac{3}{4}, ctgt = \frac{4}{3}$.

Формулы преобразования сумм или разности в произведение.

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$tg\alpha+tg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$
$$tg\alpha-tg\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$
$$ctg\alpha\pm ctg\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Пример 2. Преобразовать в произведение $\sin x+\cos 2x-\sin 3x$.

Решение:

$$\sin x+\cos 2x-\sin 3x=\cos 2x-(\sin 3x-\sin x)=\cos 2x-2\sin x\cdot\cos 2x=\cos 2x(1-2\sin x)=$$
$$2\cos 2x\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)=2\cos 2x\left(\sin\frac{\pi}{6}-\sin x\right)=2\cos 2x\cdot 2\sin\frac{\frac{\pi}{6}-x}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{6}+x}{2}=4\cos 2x\times$$
$$\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{x}{2}\right).$$

Формулы кратных аргументов:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$
$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

Пример 1.

Упростите выражение $\dfrac{\sin 3\alpha\cdot\cos^3\alpha+\cos 3\alpha\cdot\sin^3\alpha}{\sin 4\alpha}$.

Решение:

$$\frac{\sin 3\alpha\cos^3\alpha+\cos 3\alpha\sin^3\alpha}{\sin 4\alpha}=\frac{(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)\cdot\cos^3\alpha+(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)\cdot\sin^3\alpha}{\sin 4\alpha}=$$
$$=\frac{3\sin\alpha\cos^3\alpha-4\sin^3\alpha\cos^3\alpha+4\cos^3\alpha\sin^3\alpha-3\cos\alpha\sin^3\alpha}{\sin 4\alpha}=\frac{3\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{\sin 4\alpha}=$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{2\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha}{\sin 4\alpha}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{\sin 4\alpha}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\sin 4\alpha}{\sin 4\alpha}=\frac{3}{4}=0{,}75.$$

Ответ. 0,75

Хайминова Татьяна Сергеевна

Практическая часть.

Вариант №1

1. Вычислите $tg\beta$, если $tg\alpha = 1$ и $tg(\alpha - \beta) = -2$.

2.Дано: $\sin\alpha = \sqrt{\frac{13}{7}}$.

Найти $\cos\alpha$, $tg\alpha$; $ctg\alpha$

3.Упростите выражение $\frac{\cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} - \frac{1 + tg\alpha}{1 - tg\alpha}$.

4. Вычислите :

a) $\sin 240^{0;}$ $\cos 75^0; tg\, 105^0; ctg\, 250^0$

b) $tg\frac{5\pi}{3}$; $ctg\frac{5\pi}{6}$

5.Найти значение выражения:

$\frac{5\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha - 4\cos\alpha}$, если , $tg\alpha = 4$

Вариант №2

1.Вычислить:

c) $\sin 150^{0;}$ $\cos 240^0; tg\, 135^0; ctg\, 315^0$

d) $tg\frac{\pi}{4}$; $ctg\frac{\pi}{2}$

2.Найдите $tg\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right), если tg\alpha = \frac{3}{4}$.

3.Дано: $\sin\alpha = \sqrt{\frac{15}{5}}$.

Найти $\cos\alpha$, $tg\alpha$; $ctg\alpha$.

4.Вычислите:

a) $sin^2x + 1$ при $sinx = -0{,}4$

b) $2cos^2x + 1$ при $tg\alpha = \frac{\pi}{4}$

5.Найти значение выражения:

$\frac{6\sin\alpha - 2\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$, если , $tg\alpha = 3$

Хайминова Татьяна Сергеевна

Практическая работа № 10. Применение тригонометрических формул для решения задач

Цель: закрепить знания формул тригонометрии при выполнении различных практических заданий.

Теоретическая часть.

Основные тригонометрические тождества:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Практическая часть.

Вариант №1

1. Найдите значение выражения:

a) $1 - \sin^2 t$

b) $\cos^2 t - 1$

c) $(1 - \sin t)\cdot(1 + \sin t)$

d) $\sin^2 t + 2\cos^2 t - 1$

e) $\frac{(\sin t + \cos t)^2}{1 + 2\sin t\cos t}$

2. Упростите выражение $\cos(\alpha-\beta) - \cos\beta\cos\alpha$

3. Найдите значение выражения

$\cos 107^o \cdot \cos 17^o + \sin 107^o \cdot \sin 17^o$

$\cos 5\pi/8 \cdot \cos 3\pi/8 + \sin 5\pi/8 \cdot \sin 3\pi/8$

4. Найдите значение выражения:

$\sin^2\alpha - \cos^2\beta$, если $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = 0{,}5$

5. Тангенс острого угла параллелограмма равен 0,7. Найдите тангенс тупого угла этого параллелограмма

Вариант №2

1. Найдите значения выражений

a) $1 - \cos^2 t$

b) $\sin^2 t - 1$

c) $(1 - \cos t)(1 + \cos t)$

d) $\cos^2 t + 1 - \sin^2 t$

e) $\frac{1 - 2\sin t \cos t}{(\cos t - \sin t)^2}$

2. Упростить выражение $\sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin(\alpha - \beta)$

3. Найдите значение выражения

a) $\cos 36^\circ \cdot \cos 24^\circ - \sin 36^\circ \cdot \sin 24^\circ$

b) $\cos \pi/12 \cdot \cos \pi/4 - \sin \pi/12 \cdot \sin \pi/4$

4. Докажите, что при всех допустимых значениях α данное выражение принимает одно и то же значение:

$\sin 4\alpha + \cos 4\alpha + 2 \sin 2\alpha * \cos 2\alpha$

5. Синус острого угла параллелограмма равен 0.6. Найти косинус тупого угла параллелограмма.

Практическая работа № 11. Решение тригонометрических уравнений и неравенств

Цель: научиться применять различные формулы тригонометрии для преобразования и нахождения значений тригонометрических выражений при решении простейших тригонометрических уравнений и неравенств.

Теоретическая часть.

Каждой точке прямой ставится в соответствие некоторая точка окружности.

Хайминова Татьяна Сергеевна

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в один радиан.

$$1\,\text{рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}, \quad \alpha\,\text{рад} = \left(\frac{180}{\pi}\cdot\alpha\right)^{\circ},$$

$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180}\,\text{рад}, \quad \alpha^{\circ} = \frac{\pi}{180}\cdot\alpha\,\text{рад}.$$

Угол в α радиан стягивает дуга, длина которой l вычисляется по формуле l=αR, где R – радиус окружности.

Пример: Найти радианную меру угла, выраженного в градусах: 6°, 30°

$$6^{\circ} = 6\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{6\pi}{180} = \frac{\pi}{30}$$

$$30^{\circ} = 30\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

Пример: Найти радианную меру угла, выраженного в градусах: $\frac{\pi}{2}$, $0,3\pi$ $3\,рад$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{180}{\pi} = 90^{\circ}$$

$$0,3\pi = 0,3\pi\cdot\frac{180}{\pi} = 54^{\circ}$$

$$3 = 3\cdot\frac{180}{\pi} \approx 3\cdot\frac{180}{3,14} \approx 171,97^{\circ}$$

Таблица углов

Градусы	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**	**120**	**135**	**150**	**180**	**270**	**360**
Радианы	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Синусом угла α называется ордината точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α.

Косинусом угла α называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α.

Тангенсом угла α называется отношение синуса угла α к его косинусу.

$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$$

Хайминова Татьяна Сергеевна

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha,\quad tg(-\alpha)=-tg\alpha,\quad ctg(-\alpha)=-ctg\alpha$$

Знаки тригонометрических функций

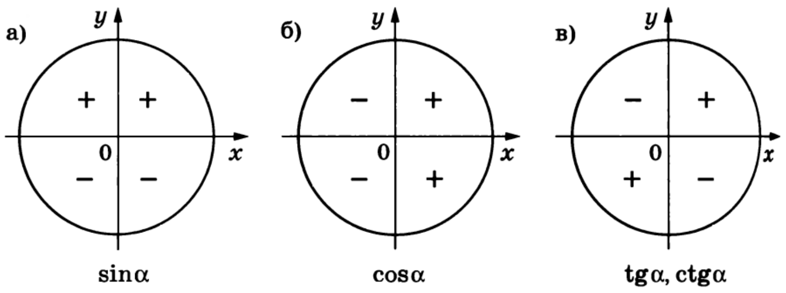


Таблица значений тригонометрических функций

Градусы α	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**	**180**	**270**	**360**
Радианы α	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$ctg\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

Пример. Вычислить $3\cdot tg\frac{\pi}{4}+\cos\pi+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Решение. $3tg\frac{\pi}{4}+\cos\pi+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=3\cdot1+(-1)+\left(-\frac{1}{2}\right)=3-1-\frac{1}{2}=1,5$

Формулами сложения называются формулы, выражающие $\cos(\alpha\pm\beta)$, $\sin(\alpha\pm\beta)$ через синусы и косинусы углов α и β.

1) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
2) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\big(\alpha+(-\beta)\big)=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

3) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
4) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\big(\alpha+(-\beta)\big)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

5) $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}==\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$$

6) $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$

Пример: Вычислить: $1)\sin 15^\circ \quad 2)\cos\left(60^\circ+45^\circ\right)$

Решение:

$$1)\sin 15^\circ=\sin\left(45^\circ-30^\circ\right)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$2)\cos\left(60^\circ+45^\circ\right)=\cos 60^\circ\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

Формулы синуса, косинуса и тангенса двойного угла.

1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

3) $\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$

$$\mathrm{tg}2\alpha=\mathrm{tg}(\alpha+\alpha)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha}=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$$

Формулы приведения

рад	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
град	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$	$180^\circ+\alpha$	$270^\circ-\alpha$	$270^\circ+\alpha$	$360^\circ-\alpha$	$360^\circ+\alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$
$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$

Практическая часть.

Вариант №1

Решите уравнения

1. $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$;
2. $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$;
3. $tg2x=\sqrt{3}$.
4. $2\sin x=-\sqrt{2}$;
5. $\cos 3x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;
6. $3tg\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите формулы для решения простейших тригонометрических уравнений в общем виде.
2. Перечислите формулы частных случаев решения простейших тригонометрических уравнений.

Вариант №2

Решите уравнения

1. $\sin 2x=\frac{1}{2}$;
2. $2\cos x=\sqrt{2}$;
3. $tg\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.
4. $2\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3}$;

5. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

6. $ctg\left(2x + 45^0\right) = -1$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите формулы для решения простейших тригонометрических уравнений в общем виде.

2. Перечислите формулы частных случаев решения простейших тригонометрических уравнений.

Практическая работа № 12. Функции свойства функции

Цель: научиться находить область определения и множество значений функции.

Теоретическая часть.

Переменная величина у называется *функцией* переменной х, если каждому значению х, взятому из области ее изменения, соответствует по определенному правилу единственное значение у.

Под *областью определения функции* понимается совокупность всех действительных значений аргумента х, при которых функция определена и выражается действительным числом.

Область значений функции есть множество всех действительных значений, которые принимает функция.

Интервалом называется множество значений х, удовлетворяющих условиям a<x< F(x2) *Функция называется убывающей* на некотором интервале, если для любых х из этого интервала большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т.е. при x1F(x2). Функции только убывающие или только возрастающие называются *монотонными*.

Функция называется четной, если при изменении знака у любого значения аргумента, взятого из области определения функции, значения функции не изменяются, т.е. F(-x)=F(x). Функция называется нечетной, если при изменении знака у любого значения аргумента, взятого из области определения функции, значения функции изменяют знак, т.е. F(-x) = -F(x).

Общая схема исследования функции:

• Найти область определения функции. Выделить особые точки (точки разрыва).

• Проверить наличие вертикальных асимптот в точках разрыва и на границах области определения.

• Найти точки пересечения с осями координат.

• Установить, является ли функция чётной или нечётной.

• Определить, является ли функция периодической или нет (только для тригонометрических функций, остальные непериодические, пункт пропускается).

• Найти точки экстремума и интервалы монотонности (возрастания и убывания) функции.

• Найти точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости.

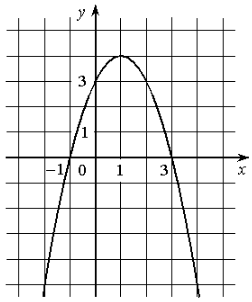
• Найти наклонные асимптоты функции.

• Построить график функции.

Практическая часть.

Вариант № 1

1. На рисунке изображён график квадратичной функции $y=f(x)$. Укажите промежутки возрастания и убывания функции. Вычислите наибольшее значение функции.



2. Постройте график функции $y = x^2 + 10x + 25$.

3. Не выполняя построения, определите, пересекаются ли парабола $y = x^2$

и прямая у = -5х -4. Если точки пересечения существуют, то найдите их координаты.

4.Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{2x+3} * \sqrt{x-1}$$

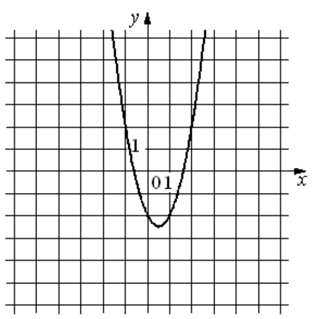
5. **Исследуйте функцию $y = 3x^4 - 4x^2 + 1$ на четность.**

6. **Постройте и прочитайте график функции**

$$y = \begin{cases} -(x+4)^2, \text{ если } -5 \leqslant x \leqslant -2, \\ 2x, \text{ если } -2 < x < 2, \\ (x-4)^2, \text{ если } 2 \leqslant x \leqslant 5. \end{cases}$$

Вариант №2

1. На рисунке изображён график функции $y=ax2+bx+c$. Укажите промежутки возрастания и убывания функции. Вычислите наименьшее значение функции.



2. Постройте график функции у = х^2 +20х + 100.

3. Не выполняя построения, определите, пересекаются ли парабола у =х^2 и прямая у =7х+8. Если точки пересечения существуют, то найдите их координаты.

4. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{(2x+3)(x-1)}$$

5. **Исследуйте функцию $y = x^5 - 2x^3 + x$ на четность.**

6.

Постройте и прочитайте график функции

$$y = \begin{cases} 3x + 9, \text{ если } -4 \leqslant x < -2, \\ x^2 - 1, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ -3x + 9, \text{ если } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

Хайминова Татьяна Сергеевна

Практическая работа № 13. Решение практических задач, используя свойства функций и их графики

Цель: формировать навыки решения задач, используя свойства функции.

Теоретическая часть.

Определение. Функцией $y = f(x), x \in X$ называется закон (правило), по которому каждому элементу (числу) x из множества X ставится в соответствие единственный элемент (число) y.

В определении: x – независимая переменная (аргумент), y - зависимая переменная (функция), множество X – область определения, то есть множество всех допустимых значений аргумента.

Из определения ясно: чтобы задать функцию $y = f(x), x \in X$, надо задать закон или правило. Надо учесть единственное требование, которому должен удовлетворять этот закон f: каждому $x \in X$ должен соответствовать единственный элемент y.

Конкретные примеры аналитического (формульного) задания функции:

Линейная функция.

а. $y = x + 1$;

б. $y = x + 1, x \in [1; 3]$.

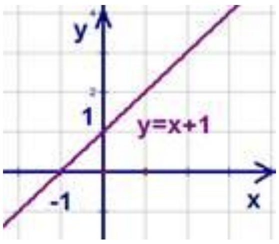


Рис. 1. График функции $y = x + 1$

Требуется: для каждой функции построить график, найти область определения и область значений.

Решение.

а. Строится график функции $y = x + 1$ (см. Рис. 1).

Ответ: $x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$.

б. Строится график функции $y = x + 1, x \in [1; 3]$ (см. Рис. 2).

Ответ: $x \in [1; 3], y \in [2; 4]$.

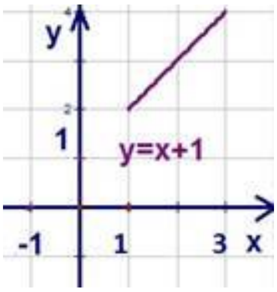


Рис. 2. График функции $y = x + 1, x \in [1; 3]$.

Квадратичная функция.

а. $y = (x - 1)^2$;

б. $y = (x - 1)^2, x \in [0; 3]$.

Требуется: для каждой функции построить график, найти область определения и область значений.

Решение.

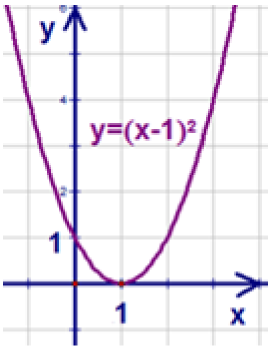


Рис. 3. График функции $y = (x - 1)^2$

а. Строим график функции $y = (x - 1)^2$ (см. Рис. 3).

Ответ: $x \in \mathbb{R}, y \geq 0$.

Чтение графика: если x возрастает от $-\infty$ до 1, то y убывает от $-\infty$ до 0; если x возрастает от 1 до $+\infty$, то y возрастает от 0 до $+\infty$.

б. Строим график функции $y = (x - 1)^2, x \in [0; 3]$ (см. Рис. 4).

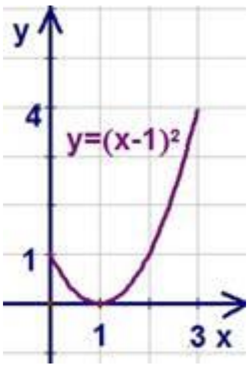


Рис. 4. График функции $y = (x - 1)^2, x \in [0; 3]$

Ответ: область определения $x \in [0; 3]$ – проекция на ось x. Область значений $E(f) = [0; 4]$ – проекция на ось y.

Хайминова Татьяна Сергеевна

Практическая часть.

Вариант № 1

1. Дана функция f (x) = 17x - 51. При каких значениях аргумента $f(x)$ =0, $f(x) < 0$, $f(x) > 0$? Является ли эта функция возрастающей или убывающей?

2. Область определения функции g (рис. 1) отрезок [-2; 6]. Найдите нули функции, промежутки возрастания и убывания, область значений функции.

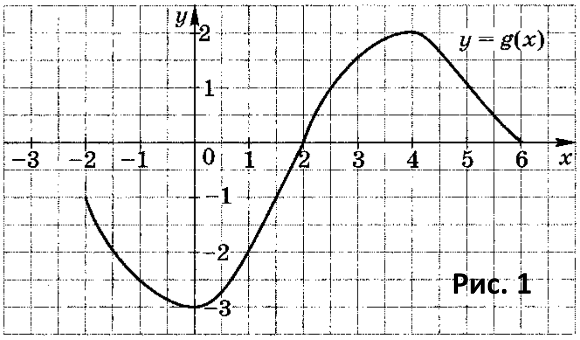


Рис. 1

3. Постройте график функции $y = x^2 - 6x + 5$. Найдите с помощью графика:

а) значение y при x = 0,5;

б) значения x, при которых y = -1;

в) нули функции; промежутки, в которых $y > 0$ и в которых $y < 0$;

г) промежуток, на котором функция возрастает.

4. Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 - 8x + 7$.

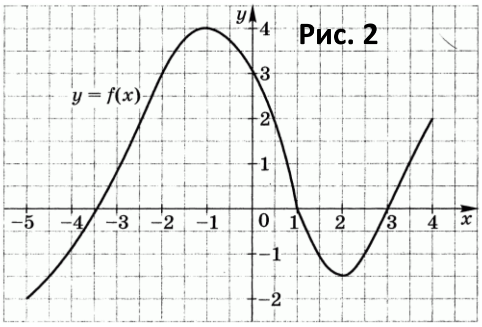
5. Найдите область значений функции $y = x^2 - 6x - 13$, где $x \in [-2; 7]$.

6. Не выполняя построения, определите, пересекаются ли парабола $y = \frac{1}{4}x^2$ и прямая $y = 5x - 16$. Если точки пересечения существуют, то найдите их координаты.

Вариант № 2

2. Дана функция $g(x) = -13x + 65$. При каких значениях аргумента $g(x) = 0$, $g(x) < 0$, $g(x) > 0$? Является ли эта функция возрастающей или убывающей?

3. Область определения функции f (рис. 2) отрезок [-5; 4]. Найдите нули функции, промежутки возрастания и убывания, класть значений функции.



3. Постройте график функции $y = x^2 - 8x + 13$. Найдите с помощью графика:

а) значение y при $x = 1{,}5$; б) значения x, при которых $y = 2$;

в) нули функции; промежутки, в которых $y > 0$ и в которых $y < 0$;

г) промежуток, в котором функция убывает.

4. Найдите наибольшее значение функции $y = -x^2 + 6x - 4$.

5. Найдите область значений функции $y = x^2 - 4x - 7$, где $x \in [-1; 5]$.

6. Не выполняя построения, определите, пересекаются ли парабола $y = \frac{1}{5}x^2$ и прямая $y = 20 - 3x$. Если точки пересечения существуют, то найдите их координаты.

Практическая работа № 14. Производная, физический и геометрический смысл производной

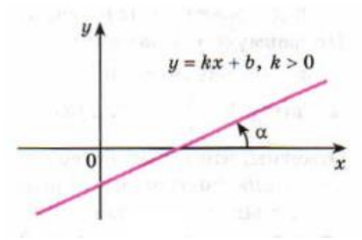
Цель: научиться составлять уравнение касательной, находить её угловой коэффициент.

Теоретическая часть.

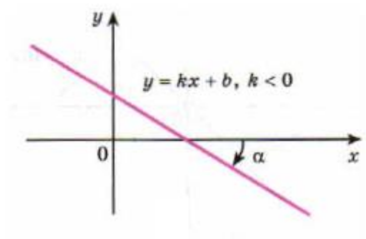
Графиком линейной функции y=kx + b является прямая.

Число k= tgα называется *угловым коэффициентом прямой*, а угол α – углом между этой прямой и осью Ox.

Если k>0, то 0<α< π/2, в этом случае функция возрастает.



Если k<0, то - π/2<α<0, в этом случае функция убывает.

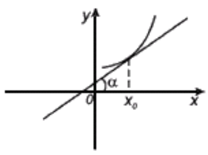


Геометрический смысл производной заключается в том, что производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции y = f(x) в этой точке. Обозначается $f'(x_0)=tg\alpha=k$ или

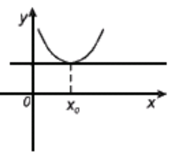
$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$, где

α — угол наклона касательной функции;

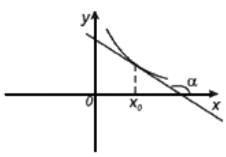
k— угловой коэффициент касательной.



$f'(x_0) = tg\alpha > 0$



$f'(x_0) = tg\alpha = 0$

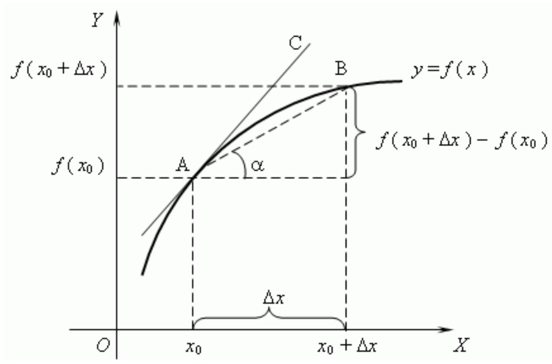


$f'(x_0) = tg\alpha < 0$

Рассмотрим график функции *y*=f(*x*):

Хайминова Татьяна Сергеевна

Рассмотрим график функции $y = f(x)$:



Из рисунка видно, что для любых двух точек A и B графика функции: f(x0+Δx)/f(x0)Δx=tgα, где α- угол наклона секущей AB.

Таким образом, разностное отношение равно угловому коэффициенту секущей.

Если зафиксировать точку A и двигать по направлению к ней точку B, то Δx неограниченно уменьшается и приближается к 0, а секущая AB приближается к касательной AC.

Следовательно, предел разностного отношения равен угловому коэффициенту касательной в точке A.

Отсюда следует: производная функции в точке есть угловой коэффициент касательной к графику этой функции в этой точке.

В этом и состоит геометрический смысл производной.

Уравнение касательной к графику функции y=f(x) в точке x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Пример 1. Составить уравнение касательной к графику функции

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1 \text{ в точке } x_0 = 3$$

Решение:

1. $f'(x) = x^2 - 4;$

$f'(3) = 3^2 - 4 = 5;$

2. $f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 4 \cdot 3 + 1 = 9 - 12 + 1 = -2;$

3. $y_k = 5(x-3) - 2;$

$y_k = 5x - 17;$

Ответ: $y = 5x - 17.$

Скорость, первая производная от перемещения по времени и находится по формуле:

V' (t) = S(t)

Ускорение, первая производная от скорости по времени и определяется по формуле:

a' (t) = V (t)

Пример:

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$, где $x(t)$ – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 9$.

Решение:

$v(t) = x'(t) = 12t - 48;$

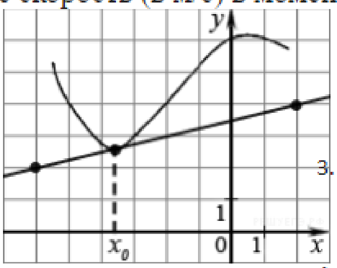
$v(9) = 12 \cdot 9 - 48 = 60$ м/с

Ответ: 60.

Практическая часть.

Вариант № 1

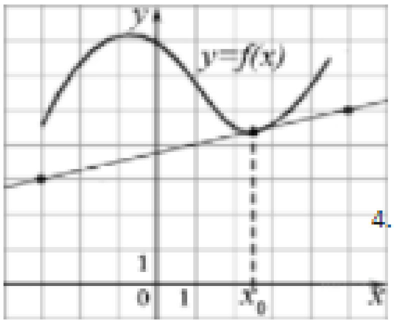
1. Материальная точка движется прямолинейно по закону $S(t) = 6t^2 - 48t + 17$ (где S— расстояние от точки отсчета в метрах. t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 9$ с.
2. Материальная точка движется прямолинейно по закону $S(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3$ (где S— расстояние от точки отсчета в метрах. t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?



3. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.
4. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 5$ в точке $x_0 = 1$.

Вариант № 2

Хайминова Татьяна Сергеевна

1. Материальная точка движется прямолинейно по закону $S(t) = t^2 - 7t - 20$ (где S — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени $t=5c$.
2. Материальная точка движется прямолинейно по закону $S(t) = \frac{1}{3}t^3 + 4t^2 - 8t - 16$ (где S — расстояние от точки отсчета в мет рах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой мо мент времени (в секундах) ее скорость была равна 1 м/с?
3. 

На рисунке изображён график функ ции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абс циссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.
4. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ в точке $x_0 = -1$