Департамент внутренней и кадровой политики Белгородской области
Областное государственное автономное профессиональное образовательное учреждение «Белгородский индустриальный колледж»

Учебно-методические указания

для выполнения практических занятий по дисциплине

«Элементы математической логики»

разработаны для специальности среднего профессионального образования
09.02.03 «Программирование в компьютерных системах»

Организация-разработчик:
ОГАПОУ «Белгородский индустриальный колледж».
Разработчик:
Преподаватель математики и специальных дисциплин
Третьяк И.Ю.

Белгород, 2017 г.

Содержание

Третьяк Ирина Юрьевна

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебно-методические указания для организации практических занятий по дисциплине «Элементы математической логики» предназначены для обучающихся по специальности 09.02.03 «Программирование в компьютерных системах». Представленный методический материал разработан на основе рабочей программы по дисциплине «Элементы математической логики», разработанной в свою очередь, на основе примерной программы по данной дисциплине.

Дисциплина «Элементы математической логики» изучается в III семестре согласно учебного плана по специальности 09.02.03 «Программирование в компьютерных системах». Рабочей программой предусмотрено 20 часов на выполнение практических занятий. На занятие отводится 2 академических часа.

Целью настоящих методических указаний является комплексное содействие обучающимся в выполнении практических занятий по дисциплине «Элементы математической логики», качественное выполнение которых в полной мере способствует освоить обязательный минимум содержания дисциплины и подготовиться к промежуточной аттестации в форме дифференцируемого зачета.

Представленные методические указания способствуют формированию личностных, предметных результатов, а также содействуют образованию метапредметных результатов.

Настоящие методические указания содержат 10 практических занятий, и включают в себя следующие элементы: название темы, цель занятия или нескольких занятий, предусмотренных по данной теме, теоретическую часть и практическую часть.

В теоретической части приводится структурированный материал, необходимый для подготовки обучающихся к практическому занятию.

Содержание практических работ позволяет освоить практические приемы составления таблиц истинности для формул алгебры логики, практические приемы выполнения равносильных преобразований формул алгебры логики и логики предикатов, научиться решать логические задачи методами алгебры логики, применять средства языка логики предикатов для записи и анализа математических предложений, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; применять математические методы для решения профессиональных задач; овладеть техникой равносильных преобразований логических формул, методами распознавания тождественно истинных формул и равносильных формул, навыками решения основных задач математической логики и методами их решения.

Тема 1 Высказывания и операции над ними

Практическая работа № 1 «Определение значения истинности высказываний. Построение составных высказываний»

Цель: Получение практических навыков построения формул логики высказываний, анализа их свойств.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

Основным понятием математической логики является понятие «простого высказывания». Под высказыванием обычно понимают всякое повествовательное предложение, утверждающее что-либо о чем-либо, и при этом мы можем сказать, истинно оно или ложно в данных условиях места и времени. Логическими значениями высказываний являются «истина» и «ложь».

Примеры высказываний.

1) Москва стоит на Неве.

2) Лондон — столица Англии.

3) Сокол не рыба.

4) Число 6 делится на 2 и на 3.

Высказывания 2), 3), 4) истинны, а высказывание 1) ложно.

Очевидно, предложение «Да здравствует Россия!» не является высказыванием.

Различают два вида высказываний.

Высказывание, представляющее собой одно утверждение, принято называть простым или элементарным. Примерами элементарных высказываний могут служить высказывания 1) и 2).

Высказывания, которые получаются из элементарных с помощью грамматических связок «не», «и», «или», «если .... то ...», «тогда и только тогда», принято называть сложными или составными.

Так, высказывание 3) получается из простого высказывания «Сокол - рыба» с помощью отрицания «не», высказывание 4) образовано из элементарных высказываний «Число 6 делится на 2», «Число 6 делится на 3», соединенных союзом «и».

Аналогично сложные высказывания могут быть получены из простых высказываний с помощью грамматических связок «или», «тогда и только тогда».

В алгебре логики все высказывания рассматриваются только с точки зрения их логического значения, а от их житейского содержания отвлекаются. Считается, что каждое высказывание либо истинно, либо ложно и ни одно высказывание не может быть одновременно истинным и ложным.

Элементарные высказывания обозначаются малыми буквами латинского алфавита: *x, y, z, ..., a, b, c, ...;* истинное значение высказывания цифрой 1, а ложное значение - буквой цифрой 0.

Если высказывание *a* истинно, то будем писать $a = 1$, а если *a* ложно, то $a = 0$.

Логические операции над высказываниями

Отрицанием высказывания x называется новое высказывание $\bar{x}$, которое является истинным, если высказывание x ложно, и ложным, если высказывание x истинно.

Отрицание высказывания x обозначается $\bar{x}$, и читается *«не x»* или *«неверно, что x»*.

Логические значения высказывания $\bar{x}$, можно описать с помощью таблицы.

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Таблицы такого вида принято называть таблицами истинности.

Пусть x высказывание. Так как $\bar{x}$ также является высказыванием, то можно образовать отрицание высказывания $\bar{x}$, то есть высказывание $\bar{\bar{x}}$, которое называется двойным отрицанием высказывания x. Ясно, что логические значения высказываний x и $\bar{\bar{x}}$ совпадают.

Например, для высказывания «Путин президент России» отрицанием будет высказывание «Путин не президент России», а двойным отрицанием будет высказывание «Неверно, что Путин не президент России».

Конъюнкцией *(логическим умножением) двух высказываний x и y* называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания *x и y* истинны, и ложным, если хотя бы одно из них ложно. Конъюнкция высказываний *x и y* обозначается символом $x\&y$ ($x \wedge y$, xy) читается *«x и y»* . Высказывания *x и y* называются членами конъюнкции.

Логические значения конъюнкции описываются следующей таблицей истинности:

x	y	xy
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Например, для высказываний «6 делится на 2», «6 делится на 3» их конъюнкцией будет высказывание «6 делится на 2 и 6 делится на 3», которое, очевидно, истинно.

Из определения операции конъюнкции видно, что союз «и» в алгебре логики употребляется в том же смысле, что и в повседневной речи. Но в обычной речи не принято соединять союзом «и» два высказывания далеких друг от друга по содержанию, а в алгебре логики рассматривается конъюнкция двух любых высказываний.

Дизъюнкцией *(логическим сложением) двух высказываний x и y* называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний *x, y* истинно, и ложным, если они оба ложны. Дизъюнкция высказываний *x, y* обозначается символом *«$x \vee y$»*, читается *«x или y»*. Высказывания *x, y* называются членами дизъюнкции.

Логические значения дизъюнкции описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

В повседневной речи союз «или» употребляется в различном смысле: исключающем и не исключающем. В алгебре логики союз «или» всегда употребляется в не исключающем смысле.

Импликацией *двух высказываний x и y* называется новое высказывание, которое считается ложным, если x истинно, а y - ложно, и истинным во всех остальных случаях.

Импликация высказываний *x, y* обозначается символом $x \to y$, читается *«если x, то y» или «из x следует y».* Высказывание *x* называют условием или посылкой, высказывание *y* - следствием или заключением, высказывание $x \to y$ следованием или импликацией.

Логические значения операции импликации описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Употребление слов «если .... то ...» в алгебре логики отличается от употребления их в обыденной речи, где мы, как правило, считаем, что, если высказывание *x* ложно, то высказывание *«Если x, то y»* вообще не имеет смысла. Кроме того, строя предложение вида *«если x, то y»* в обыденной речи, мы всегда подразумеваем, что предложение *y* вытекает из предложения *x*. Употребление слов «если ..., то ...» в математической логике не требует этого, поскольку в ней смысл высказываний не рассматривается.

Импликация играет важную роль в математических доказательствах, так как многие теоремы формулируются в условной форме *«Если x, то y».* Если при этом известно, что *x* истинно и доказана истинность импликации $x \to y$, то мы вправе сделать вывод об истинности заключения *y*.

Эквивалентностью *двух высказываний x и y* называется новое высказывание, которое считается истинным, когда оба высказывания *x, y* либо одновременно истинны, либо одновременно ложны.

Эквивалентность высказываний *x, y* обозначается символом $x \leftrightarrow y$, читается *«для того, чтобы x, необходимо и достаточно, чтобы y» или «x тогда и только тогда, когда y».* Высказывания *x, y* называются членами эквивалентности.

Логические значения операции эквивалентности описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Эквивалентность играет важную роль в математических доказательствах. Известно, что значительное число теорем формулируется в форме необходимых и достаточных условий, то есть в форме эквивалентности. В этом случае, зная об истинности или ложности одного из двух членов эквивалентности и доказав истинность самой эквивалентности, мы заключаем об истинности или ложности второго члена эквивалентности.

Практическая часть

Практическая работа № 1

Тема: *Определение значения истинности высказываний. Построение составных высказываний.*

Задание к работе:

1. Установить логическую структуру следующих предложений и записать их на языке логики высказываний:

a) Если металл нагревается, он плавится.

b) Неправда, что философские споры неразрешимы.

c) Деньги - продукт стихийного развития товарных отношений, а не результат договоренности или какого-либо иного сознательного акта.

2. Записать логической формулой следующие высказывания:

a) если на улице дождь, то нужно взять с собой зонт или остаться дома;

b) если - прямоугольный и стороны - равны, то

3. Проверить истинность высказывания:

a) Чтобы завтра пойти на занятия, я должен встать рано. Если я сегодня пойду в кино, то лягу спать поздно. Если я лягу спать поздно, то встану поздно. Следовательно, либо я не пойду в кино, либо не пойду на занятия.

b) Я пойду либо в кино, либо в бассейн. Если я пойду в кино, то получу эстетическое удовольствие. Если я пойду в бассейн, то получу физическое удовольствие. Следовательно, если я получу физическое удовольствие, то не получу эстетического удовольствия.

4. На вопрос: «Кто из трех студентов изучал дискретную математику?» получен верный ответ: «Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий». Кто изучал дискретную математику?

5. Определите, кто из четырех студентов сдал экзамен, если известно:

если первый сдал, то и второй сдал;

если второй сдал, то третий сдал или первый не сдал;

если четвертый не сдал, то первый сдал, а третий не сдал;

если четвертый сдал, то и первый сдал.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какие элементы входят язык логики?
2. Какие способы установления общезначимости формулы логики вы знаете?

Тема 2 Формулы алгебры высказываний

Практическая работа № 2 «Составление таблиц истинности для формул»

Практическая работа № 3 «Упрощение формул»

Цель: отработать навыки в составлении таблиц истинности; научиться упрощать логические выражения, применяя формулы.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

Алгоритм построения таблиц истинности для сложных выражений:

1. Определить количество строк:

***количество строк = 2ⁿ + строка для заголовка*, n** - количество простых высказываний.

2. Определить количество столбцов:

количество столбцов = количество переменных + количество логических операций;

- определить количество переменных (простых выражений);
- определить количество логических операций и последовательность их выполнения.

3. Заполнить столбцы результатами выполнения логических операций в обозначенной последовательности с учетом таблиц истинности основных логических операций.

Пример: Составить таблицу истинности логического выражения:

$$D = \neg A \,\&\, (B \vee C).$$

Решение:

1. Определить количество строк:

на входе три простых высказывания: ***A, B, C*** поэтому n=3 и количество строк = $2^3 + 1 = 9$.

2. Определить количество столбцов:

- простые выражения (переменные): ***A, B, C***;

- промежуточные результаты (логические операции):

¬ ***A*** - инверсия (обозначим через ***E***);

B ∨ ***C*** - операция дизъюнкции (обозначим через ***F***);

а также искомое окончательное значение арифметического выражения:

D* = ¬ *A* & (*B ∨ ***C)***. т.е. ***D* = *E* & *F*** - это операция конъюнкции.

3. Заполнить столбцы с учетом таблиц истинности логических операций.

A	**B**	**C**	**E**	**F**	**E & F**
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

Построение логической функции по ее таблице истинности:

Попробуем решить обратную задачу. Пусть дана таблица истинности для некоторой логической функции ***Z(X,Y)***:

X	**Y**	**Z**
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Составить логическую функцию для заданной таблицы истинности.

Правила построения логической функции по ее таблице истинности:

1. Выделить в таблице истинности те строки, в которых значение функции равно **1**.
2. Выписать искомую формулу в виде дизъюнкции нескольких логических элементов. Число этих элементов равно числу выделенных строк.
3. Каждый логический элемент в этой дизъюнкции записать в виде конъюнкции аргументов функции.
4. Если значение какого-либо аргумента функции в соответствующей строке таблице равно ***0***, то этот аргумент взять с отрицанием.

Решение.

1) В первой и третьей строках таблицы истинности значение функции равно ***1***.

2) Так как строки две, получаем ***дизъюнкцию*** двух элементов: ***( )V().***

3) Каждый логический элемент в этой дизъюнкции запишем в виде ***конъюнкции*** аргументов функции ***X*** и ***Y***: ***(X & Y) V (X & Y)***.

4) Берем аргумент с отрицанием, если его значение в соответствующей строке таблицы равно *0* и получаем искомую функцию: *Z (X, Y) =(¬ X & ¬Y) V (X & ¬Y)*.

Порядок выполнения логических операций

1. Инверсия (отрицание) $\overline{A}$ $(\overline{0} = 1, \overline{1} = 0)$

2. Конъюнкция(логическое умножение) $(1 \wedge 1 = 1,$ в остальных случаях=0)

3. а) Дизъюнкция (логическое сложение) $(0 \vee 0 = 0,$ в остальных случаях=1)

   б) Неравнозначность (либо..либо) $(0 \otimes 1 = 1,\ 1 \otimes 0 = 1,$ в остальных случаях=0)

4. а) Импликация (если…., то), $(1 \rightarrow 0 = 0$, в остальных случаях=1)

б) Эквивалентность (тогда и только тогда) $(1 \leftrightarrow 1 = 1, 0 \leftrightarrow 0 = 1$ в остальных случаях=0)

Основные законы логики

Закон тождества	A=A
Вторая форма закона не противоречия	$A \wedge \overline{A} = 0$
Закон исключения третьего	$A \vee \overline{A} = 1$
Закон двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$
Вытекает из 2 закона	$\overline{A \wedge \overline{A}} = 1$
Свойства констант	
$\overline{0} = 1$	$\overline{1} = 0$
$A \vee 0 = A$	$A \wedge 0 = 0$
$A \vee 1 = 1$	$A \wedge 1 = A$
Закон идемпотентности	
$A \vee A = A$	$A \wedge A = A$
Закон коммутативности (переместительный закон)	
$A \vee B = B \vee A$	$A \wedge B = B \wedge A$
Законы ассоциативности (сочетательный закон)	
$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$	$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$
Закон дистрибутивности (распределительный закон)	
$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
Законы поглощения	
$A \vee (A \wedge B) = A$	$A \wedge (A \vee B) = A$
$A \vee (\overline{A} \wedge B) = A \vee B$	$A \wedge (\overline{A} \vee B) = A \wedge B$
Законы де Моргана	
$\overline{A \vee B} = (\overline{A} \wedge \overline{B})$	$\overline{A \wedge B} = (\overline{A} \vee \overline{B})$
Правила замены операции импликации	
$A \rightarrow B = (\overline{A} \vee B)$	

Правила замены операции эквивалентности	
$A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$	
Формула склеивания	
$(A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}) = A$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) = A$
Правила замены операции неравнозначности	
$A \otimes B = \overline{A \leftrightarrow B} = \overline{(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})}$	

Примеры упрощения логических выражений

a) $f(a,b) = \overline{a \to b} \to \overline{b} = \overline{\overline{a} \vee b} \to \overline{b} = \overline{\overline{\overline{a} \vee b}} \vee \overline{b} = (\overline{a} \vee b) \vee \overline{b} = (\overline{a} \vee (b \vee \overline{b})) = (\overline{a} \vee 1) = 1$

b) $f(a,b) = \overline{a \vee \overline{b} \wedge b} \wedge (a \to b) = \overline{a \vee 0} \wedge (a \to b) = \overline{a} \wedge (\overline{a} \vee b) = \overline{a}$

c) $f(a,b) = a \wedge b \leftrightarrow \overline{a} = ((a \wedge b) \wedge \overline{a}) \vee (\overline{(a \wedge b)} \wedge \overline{\overline{a}}) = ((a \wedge \overline{a}) \wedge b) \vee ((\overline{a} \vee \overline{b}) \wedge a)(0 \wedge b) \vee$

$\vee (\overline{b} \wedge a) = ((\overline{a} \wedge b) \vee b) \vee \overline{a} = b \vee \overline{a}$

d) $f(a,b) = a \wedge \overline{\overline{b} \to a \vee \overline{b}} = a \wedge \overline{\overline{\overline{b}} \vee (a \vee \overline{b})} = a \wedge \overline{(b \vee \overline{b}) \vee a} = a \wedge \overline{1 \vee a} = a \wedge \overline{1} = a \wedge 0 = 0$

e) $f(a,b) = \overline{\overline{a} \to \overline{b}} \vee \overline{\overline{b} \wedge a} = \overline{\overline{\overline{a}} \vee \overline{b}} \vee (\overline{\overline{b}} \vee \overline{a}) = \overline{a \vee \overline{b}} \vee (b \vee \overline{a}) = (\overline{a} \wedge \overline{\overline{b}}) \vee (b \vee \overline{a}) =$

$(\overline{a} \wedge b) \vee (b \vee \overline{a}) = ((\overline{a} \wedge b) \vee b) \vee \overline{a} = b \vee \overline{a}$

<u>Практическая часть</u>

Практическая работа № 2 «Составление таблиц истинности для формул»

Тема: *Составление таблиц истинности для формул.*

Задание к работе:

1. Формализовать высказывание и по полученной формуле построить таблицу истинности:

   1. Если я поеду в Москву и встречу там друзей, то мы интересно проведём время;
   2. Неверно, что если дует ветер, то солнце светит только тогда, когда нет дождя;
   3. Если будет солнечная погода, то ребята пойдут в лес, а если будет пасмурная, то ребята пойдут в кино;
   4. Неверно, что если погода пасмурная, то дождь идет тогда и только тогда, когда нет ветра.
   5. Если урок по информатике будет интересным, то никто из школьников – Миша, Вика, Света – не будет смотреть в окно;
   6. Будет отменена прогулка или не будет, я останусь дома, если идёт дождь;

2. Построить таблицу истинности сложного высказывания и определить, является ли это высказывание тавтологией или противоречием:

   1. $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$
   2. $(a \to b) \to ((a \to c) \to (a \to b \cdot c))$
   3. $(a \to c) \to ((b \to c) \to (a \vee b \to c))$
   4. $((a \to b) \cdot (b \to c)) \to (a \to c)$
   5. $(\overline{a \to b}) \to (a \to \overline{b} \to \overline{a})$
   6. $(x \to y) \leftrightarrow (\overline{y} \vee \overline{x})$

3. Определить, являются ли высказывания эквивалентными

   1. $x_1 = x \cdot \overline{y}$; $x_2 = \overline{\overline{x} \vee y}$; $x_3 = \overline{x \vee \overline{y}}$.

2. $x_1 = a \leftrightarrow b$; $x_2 = (a \to b) \cdot (\overline{b} \to \overline{a})$.
3. $x_1 = \overline{a \cdot \overline{b} \vee c}$; $x_2 = \overline{a \cdot \overline{b}} \vee \overline{c}$; $x_3 = (\overline{a} \vee b) \cdot \overline{c}$.
4. $x_1 = a \to b$; $x_2 = a \vee \overline{b}$.
5. $x_1 = a \to b \cdot a$; $x_2 = a \vee b$.
6. $x_1 = a \cdot (a \vee b)$; $x_2 = a$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1.Что включают в себя логические выражения?

2.Что содержат ТИ и каков порядок их построения?

3. Какие логические выражения называются равносильными?

Практическая работа № 3 «Упрощение формул»

Цель: *научиться упрощать логические выражения, применяя формулы.*

Задание к работе:

Упростить выражение:

1 вариант	2 вариант
1) $f(a,b)=a\to\overline{a\vee b}$	**1)** $f(a,b)=\overline{a\wedge b}\to a$
2) $f(a,b)=\overline{\overline{a\vee b}\wedge\overline{b}}$	**2)** $f(a,b)=a\wedge\overline{b}\vee\overline{b\wedge a}$
3) $f(a,b)=b\wedge\overline{b\to\overline{a}}$	**3)** $f(a,b)=a\vee\overline{\overline{b}\to a}$
4) $f(a,b)=\overline{a\vee b\wedge\overline{b}}$	**4)** $f(a,b)=\overline{a\wedge b\vee\overline{a}}$
5) $f(a,b)=\overline{a\to\overline{b\wedge a}}\to\overline{b}$	**5)** $f(a,b)=\overline{a\wedge b\to\overline{\overline{a}\vee b}}\vee b$
6) $f(a,b,c)=\overline{\overline{b\to a\wedge b}\to c\wedge\overline{c}}$	**6)** $f(a,b,c)=\overline{a\vee c\to\overline{c\to a}}\vee c$
7) $f(a,b)=\overline{a\vee b\wedge\overline{a}}\to a$	**7)** $f(a,b)=\overline{\overline{\overline{b}\to a}\to a}\vee a\wedge\overline{b}$
8) $f(a,b)=b\leftrightarrow\overline{a\vee b}\to b$	**8)** $f(a,b)=a\wedge b\leftrightarrow\overline{a}\to b$

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. С какого операнда нужно начинать при упрощении логических выражений?
2. Какими формулами часто пользуются при упрощении логических выражений?

Тема 3 Нормальные формы для формул алгебры высказываний

Практическая работа № 4 «Приведение формул к совершенным нормальным формам»

Практическая работа№ 5 «Упрощение формул логики до минимальной ДНФ.

Цель: отработать навыки в приведении формул к совершенным нормальным формам; научиться применять и разрабатывать алгоритм, блок-схемы и программы реализующих построение совершенных нормальных форм; научиться упрощать формулы до минимальной ДНФ.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

Логика высказываний

Высказыванием называется повествовательное предложение, о котором можно сказать в данный момент, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно. Истинность или ложность предложения есть истинное значение высказывания. Сопоставим каждому высказыванию переменную равную 1, если оно истинно и равную 0 если оно ложно. Если P и Q – некоторые высказывания, то можно образовать высказывания “P или Q”, “P и Q”, “не P”, введя операции дизъюнкции ($\vee$), конъюнкции (&) и отрицания. Действия этих операций задаются таблицами истинности (таб. 1-3), каждой строке которых взаимно однозначно соответствуют набор значений составляющих высказываний и соответствующее значение составного высказывания.

Таблица 1

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица 2

P	Q	P&Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица 3

P	$\overline{P}$
0	1
1	0

Операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания читаются как «или», «и» и «не».

Приведем основные законы, определяющие эти операции:

- закон идемпотентности дизъюнкции и конъюнкции

$$a \vee a = a, \qquad a \,\&\, a = a; \ (1)$$

- закон коммутативности дизъюнкции и конъюнкции

$$a \vee b = b \vee a, \qquad a \,\&\, b = b \,\&\, a; \ (2)$$

- закон ассоциативности дизъюнкции и конъюнкции

$$\begin{aligned} a \vee (b \vee c) &= (a \vee b) \vee c, \\ a \,\&\, (b \,\&\, c) &= (a \,\&\, b) \,\&\, c; \end{aligned} \ (3)$$

- закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции

$$\begin{aligned} a \,\&\, (b \vee c) &= a \,\&\, b \vee a \,\&\, c, \\ a \vee (b \,\&\, c) &= (a \vee b) \,\&\, (a \vee c); \end{aligned} \ (4)$$

- закон двойного отрицания

$$\overline{\overline{a}} = a \ (5)$$

- законы де Моргана

$$\overline{a} \vee \overline{b} = \overline{a \,\&\, b}, \qquad \overline{a} \,\&\, \overline{b} = \overline{a \vee b} \ (6)$$

- законы склеивания

$$a \,\&\, b \vee a \,\&\, \overline{b} = a, \qquad (a \vee b) \,\&\, (a \vee \overline{b}) = a \ (7)$$

- законы поглощения

$$a \vee a \,\&\, b = a, \qquad a \,\&\, (a \vee b) = a \ (8)$$

- законы Порецкого

$$a \vee \overline{a} \,\&\, b = a \vee b, \qquad a \,\&\, (\overline{a} \vee b) = a \,\&\, b \ (9)$$

- Законы, определяющие действия с константой

$$\begin{aligned} &a \vee 0 = a, \qquad a \,\&\, 0 = 0, \qquad a \vee 1 = 1 \\ &a \,\&\, 1 = a, \qquad a \vee \overline{a} = 1, \qquad a \,\&\, \overline{a} = 0 \end{aligned} \ (10)$$

Всякое высказывание, построенное с помощью операций «и», «или», «не», имеет некоторое истинное значение, зависящее от значений составляющих высказываний. Любое высказывание f может быть задано в виде таблицы истинности. Если значение высказывания зависит от n составляющих высказываний $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$, то таблица истинности содержит 2^n строк. Составляющие высказывания x_i будем называть атомарными высказываниями или просто переменными x_i, рассматривая при этом сложное высказывание как функцию *f* от *n* переменных.

Построение совершенных нормальных форм.

Исчисление высказываний можно построить используя соответствующие таблицы истинности. Алгебра Буля простейшая в классе булевых алгебр; она является двухэлементной булевой алгеброй. Одним из элементов двухэлементной булевой алгебры является 0, так как булева алгебра является решеткой с дополнениями, поэтому вторым элементом этой алгебры является 1.

Каждое высказывание и соответствующую ему булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ можно представить в виде дизъюнкции конституент $\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} x_i^{\sigma i}$, где

$$x_i^{\sigma i} = \begin{cases} x_i, & \sigma_i = 1 \\ \bar{x}_i, & \sigma_i = 0 \end{cases}.$$

Пример 1. Рассмотрим пример высказывания $f(x_1, x_2, x_3)$, заданное таблицей истинности (таб. 4)

Таблица 4.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$		x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0		1	0	0	0
0	0	1	0		1	0	1	1
0	1	0	0		1	1	0	1
0	1	1	1		1	1	1	1

Согласно предыдущему утверждению функция $f(x_1, x_2, x_3)$ может быть представлена в виде:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3.$$

В дальнейшем представление булевой функции $f(x_1,x_2...x_n)$ в виде дизъюнкции конституент будем называть совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) функции $f(x_1,x_2...x_n)$.

Переменную или ее отрицание будем называть первичным термом. Количество первичных термов, которые образуют форму, называют сложностью $L(f)$ этой формы.

Сложность СДНФ функции из примера равна 12. Для уменьшения сложности этой функции используют основные тождества алгебры Буля (законы 1-8). Согласно свойству идемпотентности дизъюнкции имеем:

$f(x_1,x_2,x_3)= \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$.

Используя свойства коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, получаем:

$f(x_1,x_2,x_3)= (\bar{x}_1 \vee x_1) x_2 x_3 \vee (x_2 \vee \bar{x}_2) x_1 x_3 \vee (x_3 \vee \bar{x}_3) x_1 x_2$

Окончательно имеем

$f(x_1,x_2,x_3)= x_2 x_3 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_2 = x_3 (x_2 \vee x_1) \vee x_1 x_2$

В результате получаем сложность L(f) функции $f(x_1,x_2,x_3)$ равную 5.

Аналогично можно каждое высказывание и соответствующую ему булеву функцию $f\,(x_1,x_2,...x_n)$ представить в виде конъюнкции конституент $\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} x_i^{\sigma i}$, где

$$x_i^{\sigma i} = \begin{cases} x_i, & \sigma_i = 0 \\ \bar{x}_i, & \sigma_i = 1 \end{cases}.$$

В дальнейшем представление булевой функции $f(x_1,x_2...x_n)$ в виде конъюнкции дизъюнкций будем называть совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) функции $f(x_1,x_2...x_n)$.

Для примера 1 функция $f(x_1,x_2,x_3)$ может быть представлена в виде:

$f(x_1,x_2,x_3)= (x_1 \vee x_2 \vee x_3)\,\&\,(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)\,\&\,(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)\,\&\,(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$

Булевы функции двух переменных

Любое сложное высказывание можно представить в виде выражения, в которое входят простые высказывания (переменные) x_i операции дизъюнкции, конъюнкции, отрицания и, быть может, скобки. Рассмотрим, каким свойствам должны удовлетворять операции, с помощью которых можно выражать любое сложное выражение.

Суперпозицией системы

$S = \{\varphi_1(x_1, x_2,...,x_{k1}), \varphi_2(x_1, x_2,...,x_{k2}),...,\varphi_l(x_1, x_2,...,x_l)\}$ называется любая функция f, полученная:

а) из $\varphi_j(x_1, x_2,...,x_{kj})$ переименованием переменных, $\varphi_j \in S$;

б) подстановкой вместо некоторых переменных функции $\varphi_\alpha(x_1, x_2,...,x_{k\alpha})$ функций $\varphi_\beta(x_1, x_2,...,x_{k\beta})$, $\varphi_\alpha, \varphi_\beta \in S$;

в) с помощью многократно применения пунктов а) и б).

Система S называется полной в P_k, если любая функция $f \in P_k$ представима в виде суперпозиции этой системы; система S называется базисом, если полнота S теряется при удалении хотя бы одной функции, где P_k – k-значная логика.

Построим все булевы функции от двух переменных (таб.5)

Таблица5

переменные		Булевы функции															
1	**2**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
0	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*
1	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*

Индекс *i* функциональной переменной f_i, $i=0,1,2,....,15,$ равен десятичному эквивалентному набору значений этой функции, читаемой сверху вниз. Приведем эти булевы функции:

$f_0(x_1,x_2)=0$ – *константа 0;*

$f_1(x_1,x_2)= x_1 x_2$ *конъюнкция;*

$f_2(x_1,x_2)$ = $x_1\bar{x}_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = x_1 \to x_2 = x_1 \xrightarrow{/} x_2$ – *левая коимпликация (читается «не если x_1, то x_2);*

$f_3(x_1,x_2)$= $x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 = x_1$*;*

$f_4(x_1,x_2)$= $\bar{x}_1x_2 = \overline{x_1 \vee \bar{x}_2} = \overline{x_1 \leftarrow x_2} = x_1 \xleftarrow{/} x_2$– *правая коимпликация;*

$f_5(x_1,x_2)$= $\bar{x}_1x_2 \vee x_1x_2 = x_2$

$f_6(x_1,x_2)$= $\bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 = x_1 \oplus x_2$ – *сложение по модулю 2 или функция неравнозначности, неэквивалентности;*

$f_7(x_1,x_2)$= $x_1 \vee x_2$*- дизъюнкция;*

$f_8(x_1,x_2)$= $\bar{x}_1\bar{x}_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = x_1 \circ x_2$ – *функция Вебба;*

$f_9(x_1,x_2)$=$\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 = x_1 \sim x_2$ – *функция эквивалентности, равнозначности;*

$f_{10}(x_1,x_2)$= $\bar{x}_2$ – *отрицание;*

$f_{11}(x_1,x_2)$= $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 = \bar{x}_2 \vee x_1 = x_1 \leftarrow x_2$– *правая импликация (читается « если x_2, то x_1);*

$f_{12}(x_1,x_2)$= $\bar{x}_1$ – *отрицание;*

$f_{13}(x_1,x_2)$= $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2 = x_1 \to x_2$ *левая импликация (читается « если x_1, то x_2);*

$f_{14}(x_1,x_2)$= $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = x_1 | x_2$ – *функция Шеффера;*

$f_{15}(x_1,x_2)$=1 – константа 1.

Минимизация формул булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм

Определение. ДНФ называется *минимальной,* если она содержит наименьшее общее число вхождений переменных среди всех равносильных ей ДНФ.

Определение. *Импликантом* булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется элементарная конъюнкция С, не равная тождественно 0, такая что $C \vee f \equiv f$. Отметим, что любая конъюнкция любой ДНФ в силу закона идемпотентности (равносильность 5б) является импликантом этой функции.

Определение. Импликант C функции f называется *простым импликантом*, если после отбрасывания любой переменной из C получается элементарная конъюнкция, не являющаяся импликантом функции f.

Карта Карно — графический способ минимизации переключательных (булевых) функций, обеспечивающий относительную простоту работы с большими выражениями. Представляет собой операции попарного неполного склеивания и элементарного поглощения.

Карта Карно - это специального вида таблица, которая позволяет упростить процесс поиска минимальных форм и успешно применяется, когда число переменных не превосходит шести. **Карты Карно** для функций, зависящих от n переменных, представляет собой прямоугольник, разделенный на 2^n клеток. Каждой клетке диаграммы ставится в соответствие двоичный n-мерный набор. Значения заданной функции f из таблицы истинности вносятся в нужные квадраты, однако если клетке соответствует 0, то обычно она остается пустой.

Для построения минимальной ДНФ производится процедура склеивания "1". Склеивающимся значениям "1" соответствуют соседние клетки, т.е. клетки отличающиеся лишь значением одной переменной (на графическом изображении разделенных вертикальной или горизонтальной линией с учетом соседства противоположных крайних клеток).

- Если необходимо получить минимальную ДНФ, то в Карте рассматриваем только те клетки, которые содержат единицы, если нужна КНФ, то рассматриваем те клетки, которые содержат нули.

Процесс склеивания "1" сводится к объединению в группы единичных клеток карты Карно, при этом необходимо выполнять следующие правила;

1. Количество клеток, входящих в одну группу, должно выражаться числом кратным 2, т.е. 2^m где m=0,1,2,..

2. Каждая клетка, входящая в группу из 2^m клеток, должна иметь m соседних в группе.

3. Каждая клетка должна входить хотя бы в одну группу.

4. В каждую группу должно входить максимальное число клеток, т.е. ни одна группа не должна содержаться в другой группе.

5. Число групп должно быть минимальным.

Считывание функции f по группе склеивания производится следующим образом: переменные, которые сохраняют одинаковые значения в клетках группы склеивания, входят в конъюнкцию, причем значениям 1 соответствуют сами переменные, а значениям 0 их отрицания.

Метод Квайна основывается на применении двух основных соотношений.

1. Соотношение склеивания

$Ax \vee A\bar{x} = Ax \vee A\bar{x} \vee A$, где А - любое элементарное произведение.

2. Соотношение поглощения

$$A\tilde{x} \vee A = A, \quad \tilde{x} \in \{x; \bar{x}\}.$$

Справедливость обоих соотношений легко проверяется. Суть метода заключается в последовательном выполнении всех возможных склеиваний и затем всех поглощений, что приводит к сокращенной ДНФ. Метод применим к совершенной ДНФ. Из соотношения поглощения следует, что произвольное элементарное произведение поглощается любой его частью. Для доказательства достаточно показать, что произвольная простая импликанта $p = x_{i1}x_{i2} \ldots x_{in}$ может быть получена. В самом деле, применяя к p операцию развертывания (обратную операции склеивания):

$$A = A\,(x \vee \bar{x}) = Ax \vee A\bar{x}$$

Пример. Пусть имеется булева функция, заданная таблицей истинности. Её СДНФ имеет вид:

$$f = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4 \vee \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4 \vee \overline{x_1}x_2\,x_3\,x_4 \vee x_1\,x_2\,x_3\,\overline{x_4} \vee x_1\,x_2\,x_3\,x_4$$

Для удобства изложения пометим каждую конституенту единицы из СДНФ функции f каким-либо десятичным номером (произвольно). Выполняем склеивания. Конституента 1 склеивается только с конституентой 2 (по переменной x_3) и с конституентой 3 (по переменной x_2), конституента 2 с конституентой 4 и т. д. В результате получаем:

$$1 - 2: \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_4$$

$$1 - 3: \overline{x_1\,x_3}\,x_4$$

$$2 - 4: \overline{x_1}\,x_3\,x_4$$

$$3 - 4: \overline{x_1}x_2\,x_4$$

$$4 - 6: x_2\,x_3\,x_4$$

$$5 - 6: x_1\,x_2\,x_3$$

Заметим, что результатом склеивания является всегда элементарное произведение, представляющее собой общую часть склеиваемых конституент. Далее производим склеивания получаемых элементарных произведений. Склеиваются только те произведения, которые содержат одинаковые переменные. Имеет место два случая склеивания:

$$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_4 \lor \overline{x_1}x_2\,x_4 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_4 \lor \overline{x_1}x_2\,x_4 \lor \overline{x_1}\,x_4;$$

$$\overline{x_1\,x_3}\,x_4 \lor \overline{x_1}\,x_3\,x_4 = \overline{x_1\,x_3}\,x_4 \lor \overline{x_1}\,x_3\,x_4 \lor \overline{x_1}\,x_4;$$

с появлением одного и того же элементарного произведения $/x_1x_4$. Дальнейшие склеивания невозможны. Произведя поглощения (из полученной ДНФ вычеркиваем все поглощаемые элементарные произведения), получим сокращенную ДНФ:

$$x_2\,x_3\,x_4 \lor x_1\,x_2\,x_3 \lor \overline{x_1}\,x_4.$$

Переходим ко второму этапу. Для получения минимальной ДНФ необходимо убрать из сокращенной ДНФ все лишние простые импликанты. Это делается с помощью специальной импликантной матрицы Квайна. Строки такой матрицы отмечаются простыми импликантами булевой функции, т. е. членами сокращенной ДНФ, а столбцы - конституентами единицы, т. е. членами СДНФ булевой функции.

Пример (продолжение). Импликантная матрица имеет вид:

Простые импликанты	Конституенты единицы					
	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$	$\overline{x_1 x_2}x_3x_4$	$\overline{x_1}\,x_2\overline{x_3}\,x_4$	$\overline{x_1}x_2\,x_3\,x_4$	$x_1\,x_2\,x_3\,\overline{x_4}$	$x_1\,x_2\,x_3\,x_4$
$\overline{x_1}\,x_4.$	**X**	**X**	**X**	**X**		
$x_2\,x_3\,x_4$				**X**		**X**
$x_1\,x_2\,x_3$					**X**	**X**

Минимальные ДНФ строятся по импликантной матрице следующим образом:

1. ищутся столбцы импликантной матрицы, имеющие только один крестик. Соответствующие этим крестикам простые импликанты называются базисными и составляют так называемое ядро булевой функции. Ядро обязательно входит в минимальную ДНФ.
2. рассматриваются различные варианты выбора совокупности простых импликант, которые накроют крестиками остальные столбцы импликантной матрицы, и выбираются варианты с минимальным суммарным числом букв в такой совокупности импликант.

Пример (продолжение). Ядром нашей функции являются импликанты $x_1x_2x_3$; $/x_1x_4$. Импликанта $x_2x_3x_4$ - лишняя, так как ядро накрывает все столбцы импликантной матрицы. Поэтому функция имеет единственную тупиковую и минимальную ДНФ:

$$f = x_1\,x_2\,x_3 \vee \overline{x_1}\,x_4.$$

Следует отметить, что число N крестиков в одной строке всегда является степенью 2. Более того, читатель может легко убедиться в том, что

$$N = 2^{n-k}$$

где k - число букв, содержащихся в простой импликанте.

<u>Практическая часть</u>

Практическая работа № 4 «Приведение формул к совершенным нормальным формам»

Цель: *отработать навыки в приведении формул к совершенным нормальным формам; научиться применять и разрабатывать алгоритм, блок-схемы и программы реализующих построение совершенных нормальных форм.*

Задание к работе:

1. Изучить теоретический материал по теме практического занятия.

2. По заданной таблице истинности построить совершенную дизъюнктивную нормальную форму.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$		x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	1		1	0	0	0
0	0	1	0		1	0	1	1
0	1	0	0		1	1	0	1
0	1	1	1		1	1	1	1

3. По заданной таблице истинности построить совершенную конъюнктивную нормальную форму.

4. Определить сложность форм и выполнить упрощение их. Объясните полученные результаты.

5. Разработать блок-схему алгоритма получения СДНФ и СКНФ.

6. Реализовать на языке программирования блок-схему алгоритма получения СДНФ и СКНФ (по выбору).

7. Выписать в отчет ход выполнения работы и выводы.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.

2. Выполнить задание.

3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется высказыванием?
2. Докажите с помощью таблиц истинности основные законы алгебры Буля.
3. Что называется атомарным высказыванием?
4. Что называют совершенной дизъюнктивной нормальной формой? Как выполняется ее построение?
5. Что называют совершенной конъюнктивной нормальной формой? Как выполняется ее построение?
6. Что является сложностью формы и как ее определять.

Практическая работа№ 5

Цель: *научиться упрощать формулы до минимальной ДНФ.*

Задание к работе:

Для данной формулы булевой функции

а) найти ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ методом равносильных преобразований;

б) найти СДНФ, СКНФ табличным способом (сравнить с СДНФ, СКНФ, полученными в пункте “а”);

в) указать минимальную ДНФ и соответствующую ей переключательную схему.

Варианты заданий

	Функция		Функция
1.	$(B\to C)\vee A\bar{B}\vee \bar{A}C$	5.	$(AC\to B)\vee AB\bar{C}$
2.	$(A\to \bar{B}C)\ )\vee A\bar{B}\vee B\bar{C}$	6.	$(\bar{A}\sim C)\,(B\bar{C}\to AB)$
3.	$(AC\to \bar{B})\vee B\bar{C}$	7.	$(B\to C)\vee(B\to AC)$
4.	$B\vee(A\sim CB)\vee A\bar{C}$	8.	$(AB\to C)\vee A\vee \bar{A}C$

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что означает сокращение СДНФ, СКНФ?
2. Как вычислить ДНФ, КНФ?

Тема 4 Множества, отношения, функции

Практическая работа № 6 «Операции над множествами. Классификация множеств. Мощность множеств»

Практическая работа № 7 «Круги Эйлера решение задач»

Цель: научить выполнять операции над множествами и вычислять их мощность; научиться применять круги Эйлера в решении задач.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

Основные понятия множества

Определение 1. *Множеством* называется совокупность каких-либо объектов, обладающим общим для всех характеристическим свойством. Это определение нельзя считать строгим, так как понятие множества является исходным понятием математики и не может быть определено через другие математические объекты. Один из основателей теории множеств Г. Кантор определял множество так: "Множество есть многое, мыслимое как целое".

Пример 1.

Следующие совокупности объектов являются множествами: множество деревьев в лесу, множество целых чисел, множество корней уравнения $e^x sinx = 0.5$.

Всякое множество состоит из *элементов*. Множества обозначают большими буквами, например *A, B, C*, а элементы – маленькими буквами, например, a, b, c.

Множество и его элементы обозначаются следующим образом:

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$ – множество, состоящее из трех элементов;

$A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ – множество, состоящее из бесконечного числа элементов.

Множество может состоять из элементов, которые сами являются множествами. Нужно различать элемент a и множество, состоящее из единственного элемента a.

Пример 2.

Множество $A = \{1, 2\}$ состоит из двух элементов 1, 2; но множество $\{A\}$ состоит из одного элемента A.

Если элемент a принадлежит множеству A, это записывается следующим образом:

$a \in A$. Если элемент a не принадлежит множеству A, то записывают так: $a \notin A$.

Пример 3.

Пусть A_1 – множество простых чисел, A_2 – множество целых чисел, a = 4. Тогда

$a \in A_2$, $a \notin A_1$.

Если все элементы множества A являются элементами множества B и наоборот, т. е. множества A и B совпадают, то говорят, что $A = B$.

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, говорят, что множество A является *подмножеством* множества B, и записывают $A \subseteq B$ или $B \supseteq A$. Отметим, что по определению само множество A является своим подмножеством, т.е. $A \subseteq A$.

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то по ранее введенному определению $A = B$.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A есть *собственное подмножество* B, $A \subset B$. Если A не является собственным подмножеством B, то записывают $A \not\subset B$.

Пример 4.

Пусть A – множество четных чисел, B – множество целых чисел, C – множество нечетных чисел. Тогда

$A \subset B$, $C \subset B$, $A \not\subset C$, $B \not\subset A$.

Не надо смешивать *отношение принадлежности* ($\in$) и *отношение включения* ($\subseteq$).

Пример 5.

Пусть $A = \{2\}$ – множество, состоящее из одного элемента, $B = \{\{2\}, \{4\}\}$ – множество, состоящее из двух элементов, каждое из которых является одноэлементным множеством. Тогда имеют место следующие соотношения:

$2 \in \{2\}$;

$\{2\} \subset \{\{2\}, \{4\}\}$;

$2 \notin \{\{2\}, \{4\}\}$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством* и обозначается $\varnothing$. Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества, $\varnothing \subseteq A$, где A – любое множество. Таким образом, всякое множество содержит в качестве своих подмножеств пустое множество и само себя.

Пример 6.

Множество корней уравнения $sinx = 2$ является пустым.

Множество всех подмножеств данного множества A называется множеством-степенью и обозначается $P(A)$. Множество $P(A)$ состоит из 2^n элементов (доказать самостоятельно).

Пример 7.

Пусть множество $A = \{1, 2\}$ состоит из двух элементов 1, 2. Тогда множество $P(A)$ включает в себя пустое множество $\varnothing$, два одноэлементных множества $\{1\}$ и $\{2\}$ и само множество $A = \{1, 2\}$, т. е.

$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Мы видим, что множество $P(A)$ состоит из четырех элементов ($4 = 2^2$).

Существуют следующие способы задания множеств.

1. Перечислением элементов множества. Например:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ – конечное множество;

$B = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ – бесконечное множество.

2. Указанием свойств элементов множества. Для этого способа пользуются следующим форматом записи: $A = \{a \mid$ указание свойства элементов$\}$. Здесь a является элементом множества A, $a \in A$. Например:

$A = \{a \mid a$ – простое число$\}$ – множество простых чисел;

$B = \{b \mid b^2 - 1 = 0,\ b$ – действительное число$\}$ – множество, состоящее из двух элементов, $B = \{-1, 1\}$;

$Z = \{x \mid \frac{\sin x}{x} = 1\}$– множество, состоящее из одного числа, $x = 0$.

Операции над множествами

Рассмотрим основные операции над множествами.

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, все элементы которого являются элементами хотя бы одного из множеств A или B:

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$.

Из определения следует, что $A \subseteq A \cup B$ и $B \subseteq A \cup B$.

Аналогично определяется объединение нескольких множеств.

Пример 8.

а) Пусть $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$.

Тогда $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.

б) Пусть A – множество чисел, которые делятся на 2, а B – множество чисел, которые делятся на 3:

$A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$.

Тогда $A \cup B$ множество чисел, которые делятся на 2 или на 3:

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, \ldots\}$.

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, все элементы которого являются элементами обоих множеств A и B:

$A \cap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$.

Из определения следует, что $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$ и $A \cap B \subseteq A \cup B$.

Аналогично определяется пересечение нескольких множеств.

Пример 9.

Рассмотрим данные из примера 1.8.

а) Пусть $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$.

Тогда $A \cap B = \{4, 6\}$.

б) Пусть A – множество чисел, которые делятся на 2, а B – множество чисел, которые делятся на 3:

$A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$.

Тогда $A \cap B$ множество чисел, которые делятся и на 2 и на 3:

$A \cup B = \{6, 12, 18, \ldots\}$.

Может оказаться, что множества не имеют ни одного общего элемента. Тогда говорят, что множества не пересекаются или что их пересечение – пустое множество.

Пример 10.

Пусть $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 4\}$.

Тогда $A \cap B \cap C = \varnothing$.

Относительным дополнением множества B до множества A называется множество $A \setminus B$, все элементы которого являются элементами множества A, но не являются элементами множества B:

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Пример 11.

Рассмотрим данные из примера 1.8.

а) $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$.

$A \setminus B = \{4, 5\}$, $B \setminus A = \{2\}$.

б) $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$.

Тогда $A \setminus B$ – множество чисел, которые делятся на 2, но не делятся на 3, а $B \setminus A$ – множество чисел, которые делятся на 3, но не делятся на 2:

$A \setminus B = \{2, 4, 8, 10, 14, \ldots\}$.

$B \setminus A = \{3, 9, 15, 21, 27, \ldots\}$.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество $A + B$:

$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Пример 12.

Рассмотрим данные из примера 1.11.

а) $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$.

$A \setminus B = \{4, 5\}$, $B \setminus A = \{2\}$, $A + B = \{2, 4, 5\}$.

б) $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$, $A \setminus B = \{2, 4, 8, 10, 14, \ldots\}$.

$B \setminus A = \{3, 9, 15, 21, 27, \ldots\}$, $A + B = \{2, 3, 4, 8, 9, \ldots\}$.

Универсальным множеством называется такое множество U, что все рассматриваемые в данной задаче множества являются его подмножествами.

Абсолютным дополнением множества A называется множество $\overline{A}$ всех таких элементов $x \in U$, которые не принадлежат множеству A: $\overline{A} = U \setminus A$.

Пример 1.13.

Пусть A – множество положительных четных чисел.

Тогда U – множество всех натуральных чисел и $\overline{A}$ – множество положительных нечетных чисел.

Счетные множества

Определение 1. Множество, эквивалентное множеству натуральных чисел $N = \{1, 2, 3, \ldots, n\ldots\}$, называется *счетным*.

Можно сказать также, что множество счетно, если его элементы можно перенумеровать.

Пример.

Следующие множества являются счетными.:

1. $A_1 = \{-1, -2, \ldots, -n, \ldots\}$;
2. $A_2 = \{2, 2^2, \ldots, 2^n, \ldots\}$;
3. $A_3 = \{2, 4, \ldots, 2n, \ldots\}$;
4. $A_4 = \{\ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots\}$;

Чтобы установить счетность некоторого множества, достаточно указать взаимно однозначное соответствие между элементами данного множества и множества натуральных чисел. Для примера 1.19 взаимно однозначное соответствие устанавливается по следующим правилам: для множества A_1: $-n \leftrightarrow n$; для множества A_2: $2^n \leftrightarrow n$; для множества A_3: $2n \leftrightarrow n$; счетность множества A_4 установлена в примере 1.19;

Установить счетность множеств можно также, используя следующие *теоремы о счетных множествах* (приводятся без доказательств).

Теорема 1. Всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно.

Пример.

Множество $A = \{3, 6, \ldots, 3n, \ldots\}$ счетно, т.к. A – бесконечное подмножество множества натуральных чисел, $A \subset N$.

Теорема 2. Объединение конечной или счетной совокупности счетных множеств счетно.

Пример.

Множество $A = \{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$ неотрицательных целых чисел счетно, множество $B = \{0, -1, \ldots, -n, \ldots\}$ неположительных целых чисел тоже счетно, поэтому множество всех целых чисел $C = A \cup B = \{\ldots, -n, \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ тоже счетно.

Теорема 3. Множество всех рациональных чисел, т.е. чисел вида $\frac{p}{q}$, где p и q целые числа, счетно.

Теорема 4. Если $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ – счетные множества, то множество всех пар $C = \{(a_k, b_n), k = 1, 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots\}$ счетно.

Пример.

Геометрический смысл пары (a_k, b_n) – точка на плоскости с рациональными координатами (a_k, b_n). Поэтому можно утверждать, что множество всех точек плоскости с рациональными координатами счетно.

Теорема 5. Множество всех многочленов $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ любых степеней с рациональными коэффициентами $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ счетно.

Теорема 6. Множество всех корней многочленов любых степеней с рациональными коэффициентами счетно.

Множества мощности континуума

Существуют бесконечные множества, элементы которых нельзя перенумеровать. Такие множества называются *несчетными*.

Теорема Кантора. Множество всех точек отрезка [0, 1] несчетно.

Доказательство.

Пусть множество точек отрезка [0, 1] счетно. Значит, эти точки можно перенумеровать, т. е. расположить в виде последовательности $x_1, x_2 \ldots x_n, \ldots$.

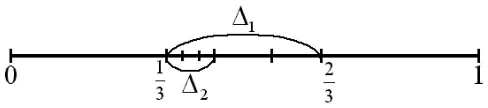


Рис. 1.7

Разобьем отрезок [0, 1] на три равные части. Где бы ни находилась точка x_1, она не может принадлежать всем отрезкам $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Поэтому среди них есть отрезок Δ_1, не содержащий точку x_1 (рис. 1.7). Возьмем этот отрезок Δ_1 и разделим его на три равные части. Среди них всегда есть отрезок Δ_2, не содержащий точку x_2. Разделим этот отрезок на три равные части и т. д. Получим последовательность отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$. В силу аксиомы Кантора сходится к некоторой точке x при $n \to \infty$. По построению эта точка x принадлежит каждому отрезку Δ_1, Δ_2, $\Delta_3, \ldots, \Delta_n, \ldots$, т. е. она не может совпадать ни с одной из точек x_1, x_2, ... x_n, …, т. е. последовательность x_1, x_2 ... x_n, …не исчерпывает всех точек отрезка [0, 1], что противоречит первоначальному предположению. Теорема доказана.

Множество, эквивалентное множеству всех точек отрезка [0, 1] называется *множеством мощности континуума*.

Так как множества точек интервалов, отрезков и всей прямой эквивалентны между собой, то все они имеют мощность континуума.

Чтобы доказать, что данное множество имеет мощность континуума, достаточно указать взаимно однозначное соответствие между данным множеством и множеством точек отрезка, интервала или всей прямой.

Пример.

Из рисунок 1 следует, что множество точек параболы $y = x^2$ эквивалентно множеству точек прямой $-\infty < x < \infty$ и, следовательно, имеет мощность континуума.

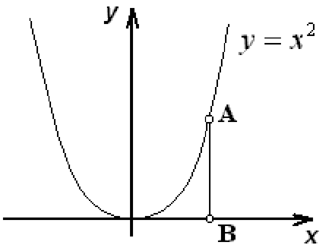


Рисунок 1

Установить мощность континуума можно также, используя следующие *теоремы о множествах мощности континуума* (приводятся без доказательств).

Теорема 1. Множество всех подмножеств счетного множества счетно.

Теорема 2. Множество иррациональных чисел имеет мощность континуума.

Теорема 3. Множество всех точек n-мерного пространства при любом n имеет мощность континуума.

Теорема 4. Множество всех комплексных чисел имеет мощность континуума.

Теорема 5. Множество всех непрерывных функций, определенных на отрезке $[a, b]$ имеет мощность континуума.

Итак, мощности бесконечных множеств могут различаться. Мощность континуума больше, чем мощность счетного множества. Ответ на вопрос, существуют ли множества более высокой мощности, чем мощность континуума, дает следующая теорема (приводится без доказательства).

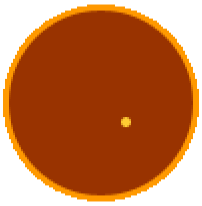
Теорема о множествах высшей мощности. Множество всех подмножеств данного множества имеет более высокую мощность, чем данное множество.

Из этой теоремы следует, что множеств с максимально большой мощностью не существует.

Эйлеровы круги (круги Эйлера) — принятый в логике способ моделирования, наглядного изображения отношений между объемами понятий с помощью кругов, предложенный знаменитым математиком Л. Эйлером (1707–1783).

Обозначение отношений между объемами понятий посредством кругов было применено еще представителем афинской неоплатоновской школы — Филопоном (VI в.), написавшим комментарии на «Первую Аналитику» Аристотеля.

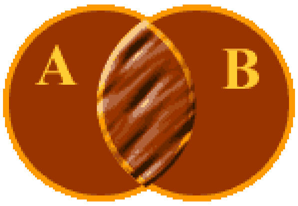
Условно принято, что круг наглядно изображает объем одного какого-нибудь понятия. Объем же понятия отображает совокупность предметов того или иного класса предметов. Поэтому каждый предмет класса предметов можно изобразить посредством точки, помещенной внутри круга, как это показано на рисунке:



Группа предметов, составляющая вид данного класса предметов, изображается в виде меньшего круга, нарисованного внутри большего круга, как это сделано на рисунке:

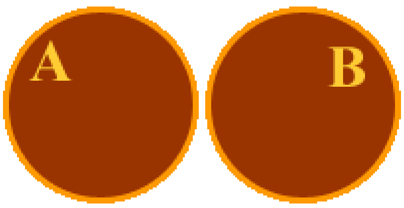
Такое именно отношение существует между объемами понятий «небесное тело» (А) и «комета» (В). Объему понятия «небесное тело» соответствует больший круг, а объему понятия «комета» – меньший круг. Это означает, что все кометы являются небесными телами. Весь объем понятия «комета» входит в объем понятия «небесное тело».

В тех случаях, когда объемы двух понятий совпадают только частично, отношение между объемами таких понятий изображается посредством двух перекрещивающихся кругов, как это показано на рисунке:



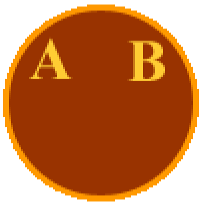
Такое именно отношение существует между объемом понятий «учащийся» и «комсомолец». Некоторые (но не все) учащиеся являются комсомольцами; некоторые (но не все) комсомольцы являются учащимися. Незаштрихованная часть круга А отображает ту часть объема понятия «учащийся», которая не совпадает с объемом понятия «комсомолец»; незаштрихованная часть круга В отображает ту часть объема понятия «комсомолец», которая не совпадает с объемом понятия «учащийся». Заштрихованиая часть, являющаяся общей для обоих кругов, обозначает учащихся, являющихся комсомольцами, и комсомольцев, являющихся учащимися.

Когда же ни один предмет, отображенный в объеме понятия А, не может одновременно отображаться в объеме понятия В, то в таком случае отношение между объемами понятий изображается посредством двух кругов, нарисованных один вне другого. Ни одна точка, лежащая на поверхности одного круга, не может оказаться на поверхности другого круга.



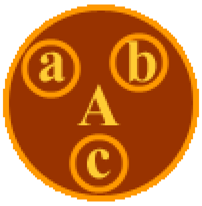
Такое именно отношение существует, например, между понятиями «тупоугольный треугольник» и «остроугольный треугольник». В объеме понятия «тупоугольный треугольник» не отображается ни один остроугольный треугольник, а в объеме понятия «остроугольный треугольник» не отображается ни один тупоугольный треугольник.

Отношения между равнозначащими понятиями, объемы которых совпадают, отображаются наглядно посредством одного круга, на поверхности которого написаны две буквы, обозначающие два понятия, имеющие один и тот же объем:



Такое отношение существует, например, между понятиями «родоначальник английского материализма» и «автор „Нового Органона“». Объемы этих понятий одинаковы, в них отобразилось одно и то же историческое лицо – английский философ Ф. Бэкон.

Нередко бывает и так: одному понятию (родовому) подчиняется сразу несколько видовых понятий, которые в таком случае называются соподчиненными. Отношение между такими понятиями изображается наглядно посредством одного большого круга и нескольких кругов меньшего размера, которые нарисованы на поверхности большего круга:



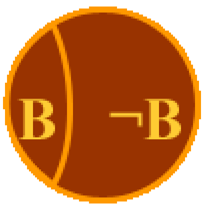
Такое именно отношение существует между понятиями «скрипка», «флейта», «пианино», «рояль», «барабан». Эти понятия в равной мере подчинены одному общему родовому понятию «музыкальные инструменты».

Круги, изображающие соподчиненные понятия, не должны касаться друг друга и перекрещиваться, так как объемы соподчиненных понятий несовместимы; в содержании соподчиненных понятий имеются, наряду с общими, различающие признаки. Эта схема отображает общее, что характерно для отношения любых соподчиненных понятий, взятых из различных областей знания. Это применимо к понятиям: «дом», «сарай», «ангар», «театр», подчиненных понятию «постройка»; к понятиям: «муха», «комар», «бабочка», «жук», «пчела», подчиненных понятию «насекомое» и т. д.

В тех случаях, когда между понятиями имеется отношение противоположности, отношение между объемами таких понятий отображается посредством одного круга, обозначающего общее для обоих противоположных понятий родовое понятие, а отношение между противоположными понятиями обозначается так: А – родовое понятие, В и С – противоположные понятия. Противоположные понятия исключают друг друга, но входят в один и тот же род, что можно выразить такой схемой:

При этом видно, что между противоположными понятиями возможно третье, среднее, так как они не исчерпывают полностью объема родового понятия. Такое именно отношение существует между понятиями «легкий» и «тяжелый». Они исключают друг друга. Нельзя об одном и том же предмете, взятом в одно и то же время и в одном и том же отношении, сказать, что он и легкий, и тяжелый. Но между данными понятиями есть среднее, третье: предметы бывают не только легкого и тяжелого веса, но также и среднего веса.

Когда же между понятиями существует противоречащее отношение, тогда отношение между объемами понятий изображается иначе: круг делится на две части так: А – родовое понятие, В и не-В (обозначается как ¬В) – противоречащие понятия. Противоречащие понятия, исключают друг друга и входят в один и тот же род, что можно выразить такой схемой:



При этом видно, что между противоречащими понятиями третье, среднее, невозможно, так как они полностью исчерпывают объем родового понятия. Такое отношение существует, например, между понятиями «белый» и «небелый». Они исключают друг друга. Нельзя об одном и том же предмете, взятом в одно и то же время и в одном и том же отношении, сказать, что он и белый и небелый.

Посредством Эйлеровых кругов изображаются также отношения между объемами субъекта и предиката в суждениях. Так, в общеутвердительном суждении, выражающем определение какого-либо понятия, объемы субъекта и предиката, как известно, равны. Наглядно такое отношение между объемами субъекта и предиката изображается посредством одного круга, подобно изображению отношений между объемами равнозначащих понятий. Разница только в том, что в данном случае всегда на поверхности круга надписываются две определенные буквы: S (субъект) и P (предикат), как это показано на рисунке:

Иначе выглядит схема отношения между объемами субъекта и предиката в общеутвердительном суждении, не являющемся определением понятия. В таком суждении объем предиката больше объема субъекта, объем субъекта целиком входит в объем предиката. Поэтому отношение между ними изображается посредством большого и малого кругов, как показано на рисунке:

Решение задач, применяя круги Эйлера.

Рассмотрим несколько задач, которые могут быть решены с применением кругов Эйлера на уроках математики или информатики.

<u>Задачи</u>

1. В классе 25 учащихся. Из них 5 человек не умеют играть ни в шашки, ни в шахматы. 18 учащихся умеют играть в шашки, 20 – в шахматы. Сколько учащихся класса играют и в шашки, и в шахматы?

2. Каждый из 35 пятиклассников является читателем, по крайней мере, одной из двух библиотек: школьной и районной. Из них 25 учащихся берут книги в школьной библиотеке, 20 – в районной. Сколько из пятиклассников:

а) не являются читателями школьной библиотеки;

б) не являются читателями районной библиотеки;

в) являются читателями только школьной библиотеки;

г) являются читателями только районной библиотеки;

д) являются читателями обеих библиотек?

3. Каждый ученик в классе изучает либо английский, либо французский язык, либо оба этих языка. Английский язык изучают 25 человек, французский – 27 человек, а тот и другой – 18 человек. Сколько всего учеников в классе?

4. На листе бумаги начертили круг площадью 78 см^2 и квадрат площадью 55 см^2. Площадь пересечения круга и квадрата равна 30 см^2. Не занятая кругом и квадратом часть листа имеет площадь 150 см^2. Найдите площадь листа.

5. В детском саду 52 ребенка. Каждый из них любит либо пирожное, либо мороженое, либо и то, и другое. Половина детей любит пирожное, а 20 человек – пирожное и мороженое. Сколько детей любит мороженое?

6. В ученической производственной бригаде 86 старшеклассников. 8 из них не умеют работать ни на тракторе, ни на комбайне. 54 ученика хорошо овладели трактором, 62 – комбайном. Сколько человек из этой бригады могут работать и на тракторе, и на комбайне?

7. В классе 36 учеников. Многие из них посещают кружки: физический (14 человек), математический (18 человек), химический (10 человек). Кроме того, известно, что 2 человека посещают все три кружка; из тех, кто посещает два кружка, 8 человек занимаются в математическом и физическом кружках,

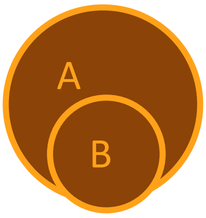
5 – в математическом и химическом, 3 – в физическом и химическом. Сколько человек не посещают никаких кружков?

8. 100 шестиклассников нашей школы участвовали в опросе, в ходе которого выяснялось, какие компьютерные игры им нравятся больше: симуляторы, квесты или стратегии. В результате 20 опрошенных назвали симуляторы, 28 – квесты, 12 – стратегии. Выяснилось, что 13 школьников отдают одинаковое предпочтение симуляторам и квестам, 6 учеников – симуляторам и стратегиям, 4 ученика – квестам и стратегиям, а 9 ребят совершенно равнодушны к названным компьютерным играм. Некоторые из школьников ответили, что одинаково увлекаются и симуляторами, и квестами, и стратегиями. Сколько таких ребят?

Ответы

1. А – шахматы 25-5=20 – чел. умеют играть

В – шашки   20+18-20=18 – чел играют и в шашки, и в шахматы



2. Ш – множество посетителей школьной библиотеки

Р – множество посетителей районной библиотеки

25+20-35=10

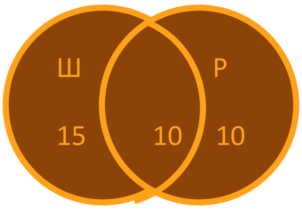
а) 10;

б) 15;

в) 15;

г)10;

д) 10.

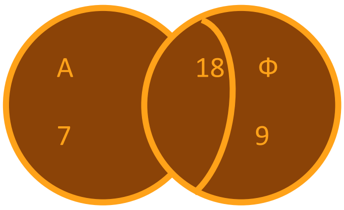


3. А – английский, Ф – французский

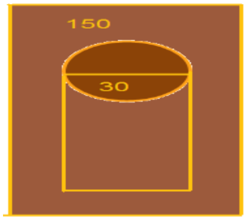
25-18=7 – только английский

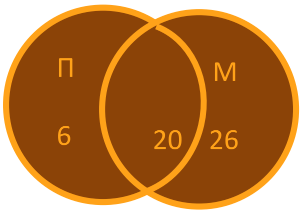
27-18=9 – только французский

7+18+9=34 – чел. в классе



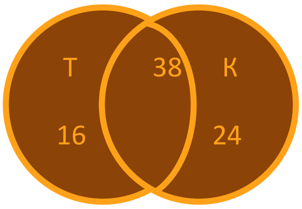
4. 253. $S_{кр}$=78; $S_{кв}$=55; $S_{сумм}$=150; $S_{листа}$=78+55-30+150=253



5. 

П – пирожное, М – мороженое

52-26-20=6 – детей любят пирожное

6. 

Т – трактор, К – комбайн

54+62-(86-8)=38 – умеют работать и на тракторе и на комбайне.

7. <u>*Способ 1*</u>. Выясним, сколько ребят посещают только математический кружок: 18-8-5-2 = 3; только физический: 14-8-3-2 = 1; только химический: 10-5-3-2 = 0. Таким образом, три кружка посещают 2 ученика; два кружка – 16 учеников (8 + 3 + 5); один кружок – 4 ученика (3 + 1 + 0). Всего посещают кружки 2 + 16 + 4 = 22 ученика. Следовательно, кружки не посещают 36 – 22 = 14 ученика.

<u>*Способ 2*</u>. Представим множества учащихся, посещающих математический, физический и химический кружки, в виде кругов, вырезанных из плотной бумаги. Будем считать, что площадь каждого из этих кругов равна числу учащихся, посещающих соответствующий кружок. Наложим круги друг на друга так, чтобы было понятно, что есть учащиеся, посещающие один, два или три кружка. Вычислим площадь получившейся плоской фигуры: 14 + 18 + 10 – (8 + 5 + 3) – 2 – 2 = 22 – это и есть число учеников, посещающих кружки. Следовательно, кружки не посещают 36 – 22 = 14 учеников.

8. Пусть Х – искомое число учеников, увлекающихся всеми видами компьютерных игр. Тогда: 20 + 28 + 12 + 13 + 6 + 4 + 9 + Х = 100, Х = 6.

<u>Практическая часть</u>

Практическая работа № 6 «Операции над множествами. Классификация множеств. Мощность множеств»

Цель: *научить выполнять операции над множествами и вычислять их мощность.*

Задание к работе:

Вариант № 1

1. Фирма имеет 100 предприятий, причем каждое предприятие выпускает хотя бы одну продукцию вида А, В, С. Продукцию всех трех видов выпускают 10 предприятий, продукцию А и В – 18 предприятий, продукцию А и С – 15 предприятий, продукцию В и С – 21 предприятие. Число предприятий, выпускающих продукцию А равно числу предприятий, выпускающих продукцию В и равно числу предприятий, выпускающих продукцию С. Найти число всех предприятий.

2. Упростить: $\overline{(A \cup B)} \cup \overline{A} \cup \overline{B}$.

3. Является ли множество $A = \{1, 2, 3\}$ подмножеством множества $B = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$?

4. Придумать пример множеств *A, B, C*, каждое из которых имеет мощность континуума, так, чтобы выполнялось равенство: $A \cup B = C$.

5. Эквивалентны ли множества $A = \{x: x^2 - 8x + 15 = 0\}$ и $B = \{2, 3\}$?

Вариант № 2

1. В группе спортсменов 30 человек. Из них 20 занимаются плаванием, 18 – легкой атлетикой и 10 – лыжами. Плаванием и легкой атлетикой занимаются 11 человек, плаванием и лыжами – 8, легкой атлетикой и лыжами – 6 человек. Сколько спортсменов занимаются всеми тремя видами спорта?

2. Упростить: $A\,(A \cup B)$.

3. В каком случае $A \subseteq A \cap B$?

4. Придумать пример множеств *A, B, C*, каждое из которых имеет мощность континуума, так, чтобы выполнялось равенство: $A \cup B = C$.

5. Какое из множеств $A = \{1, 4, 9, 16, 25,\ldots\}$ и $B = \{1, 1/2, 1/4, 1/6, 1/8,\ldots\}$ имеет большую мощность?

Вариант № 3

1. В студенческой группе 20 человек. Из них 10 имеют оценку “отлично” по английскому языку, 8 - по математике, 7 - по физике, 4 - по английскому языку и по математике, 5 - по английскому языку и по физике, 4 - по математике и по физике, 3 - по английскому языку, по математике и по физике. Сколько студентов группе не имеют отличных оценок?

2. Упростить: $(A\backslash B) \cup (A\backslash B)$.

3. Найти все подмножества множества $A= \{1, 2, 3, 4)$.

4. Придумать пример множеств *A, B, C*, каждое из которых имеет мощность континуума, так, чтобы выполнялось равенство: $A \cap B = C$.

5. Доказать, что множества точек контуров всех треугольников эквивалентны.

Вариант № 4

1. В классе 20 человек. На экзаменах по истории, математике и литературе 10 учеников не получили ни одной пятерки, 6 учеников получили 5 по истории, 5 – по математике и 4 – по литературе; 2 - по истории и математике, 2 - по истории и литературе, 1 - по математике и литературе. Сколько учеников получили 5 по всем предметам?

2. Упростить: $(A\cap B) \cup (A\cap B)$.

3. Является ли множество $A = \{1, 2, 3\}$ подмножеством множества $B = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$?

4. Придумать пример множеств *A, B, C*, каждое из которых имеет мощность континуума, так, чтобы выполнялось равенство: $A \cup B = C$.

5. Эквивалентны ли множества $A = \{2^x, 0<x< \infty\}$ и $B = \{2^n, n = 1, 2, \ldots\}$?

Вариант № 5

1. В спортивном лагере 100 человек, занимающихся плаванием, легкой атлетикой и лыжами. Из них 10 занимаются и плаванием, и легкой атлетикой, и лыжами, 18 – плаванием и легкой атлетикой, 15 – плаванием и лыжами, 21 – легкой атлетикой и лыжами. Число спортсменов, занимающихся плаванием, равно числу спортсменов, занимающихся легкой атлетикой, и равно числу спортсменов, занимающихся лыжами. Найти это число.

2. Упростить: $(A \cup B) \cup (A \cup B)$.

3. Найти все подмножества множества $A = \{1, 2, 3, 4)$.

4. Придумать пример множеств A, B, C, каждое из которых имеет мощность континуума, так, чтобы выполнялось равенство: $A \cup B = C$.

5. Доказать, что множества точек контуров всех треугольников эквивалентны.

Вариант № 6

1. Группе студентов предложено три спецкурса: по мультимедиа, искусственному интеллекту и имитационному моделированию. 22 студента записались на спецкурс по мультимедиа, 18 – на спецкурс по искусственному интеллекту, 10 – на спецкурс по имитационному моделированию, 8 – на спецкурсы по мультимедиа и искусственному интеллекту, 15 – на спецкурсы по мультимедиа и имитационному моделированию, 7 – на спецкурсы по искусственному интеллекту и имитационному моделированию. 5 студентов записались на все три спецкурса. Сколько студентов в группе?

2. Верно или неверно равенство: $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$?

3. Придумать пример множеств A, B, C, каждое из которых имеет мощность континуума, так, чтобы выполнялось равенство: $A \cup B = C$.

4. Придумать пример множеств A, B, C, каждое из которых имеет мощность континуума, так, чтобы выполнялось равенство: $A \cup B = C$.

5. Эквивалентны ли множества $A = \{x: x^2-8x+15= 0\}$ и $B = \{2, 3\}$?

Вариант № 7

1. Во время сессии 24 студента группы должны сдать три зачета: по физике, математике и программированию. 20 студентов сдали зачет по физике, 10 – по математике, 5 – по программированию, 7 – по физике и математике, 3 – по физике и программированию, 2 – по математике и программированию. Сколько студентов сдали все три зачета?

2. Упростить: $(A \cup B) \cup (A \cap B)$.

3. Доказать, что множество точек $A = \{(x, y)\colon y = |x|, -, \ -1 \le x \le 1\}$ несчетно.

4. Придумать пример множеств A, B, C, каждое из которых имеет мощность континуума, так, чтобы выполнялось равенство: $A \cup B = C$.

5. Эквивалентны ли множества $A = \{y\colon y = x^3, 1 < x < 2\}$ и $B = \{y\colon y = 3^x, 3 < x < \infty\}$?

Вариант № 8

1. В группе переводчиков 15 человек владеет английским языком, 19 – французским, 8 – немецким. 9 переводчиков владеют английским и французским языком, 7 – английским и немецким, 6 – французским и немецким. 4 переводчика владеют всеми тремя языками. Сколько переводчиков в группе?

2. Пользуясь равносильными преобразованиями, установить, верно или неверно равенство: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup C$?

3. В каком случае $A \subseteq A \cap B$?

4. Придумать пример множеств A, B, C, каждое из которых имеет мощность континуума, так, чтобы выполнялось равенство: $A \cup B = C$.

5. Эквивалентны ли множества $A = \{x\colon x^2 - 3x + 2 = 0\}$ и $B = \{1, 3\}$?

Вариант № 9

1. Опрос группы студентов показал, что 70% из них любят ходить в кино, 60% в театр, 30% на концерты. В кино и театр ходят 40% студентов, в кино и на концерты – 20%, в театр и на концерты – 10%. Сколько студентов (в %) ходят в кино, театр и на концерты?

2. Верно или неверно равенство: $(A \cap B) \cap (A \cup B) = B$?

3. Привести пример двух множеств A и B, таких, что мощность множества A больше мощности множества B.

4. Придумать пример множеств A, B, C, каждое из которых имеет мощность континуума, так, чтобы выполнялось равенство: $A \cup B = C$.

5. Эквивалентны ли множества $A = \{x\colon\ x^3 - 1 = 0\}$ и $B = \{x\colon x^2 - 3x + 2 = 0\}$?

Вариант № 10

1. В группе 20 учеников. После медицинского осмотра на дополнительное обследование 14 учеников были направлены к терапевту, 6 – к окулисту, 5 – к ортопеду. К терапевту и окулисту были направлены 3 ученика, к терапевту и ортопеду –3, к окулисту и ортопеду – 2. Сколько учеников были направлены к терапевту, окулисту и ортопеду?

2. Упростить: $(\overline{A} \cup \overline{B}) \setminus (A \cup B)$.

3. Верно или неверно равенство: $(A \cap B) \cap (A \cup B) = B$?

4. Найти все подмножества множества $O = \{c, d\}$.

5. Эквивалентны ли множества $A = \{(x, y)\colon y = \ln x,\ 0 < x < \infty\}$ и $B = \{(x, y)\colon y = \sin x,\ -\infty < x < \infty\}$?

Вариант № 11

1. При обследовании рынка спроса инспектор указал в опросном листе следующие данные. Из 1000 опрошенных 811 покупают жевательную резинку "Дирол", 752 – "Орбит" , 418 – "Стиморол", 570 – "Дирол" и "Орбит", 356 – "Дирол" и "Стиморол", 348 – "Орбит" и "Стиморол", 297 – все виды жевательной резинки. Показать, что инспектор ошибся.

2. Упростить: $\overline{A} \cup (B \setminus (A \cup B))$.

3. Придумать пример множеств A, B, C, так, чтобы выполнялось равенство: $A \cup B = C$, причем A – конечное множество, B и C – счетные множества.

4. Найти все подмножества множества $A = \{a, b, c, d\}$.

5. Пусть A – множество целых чисел, а B – множество четных чисел. Какие из следующих отношений справедливы: а) $A = B$; б) $A \sim B$; в) $A \supset B$; г) $A \supseteq B$; д) $A \not\subset B$; е) $A \in B$.

Вариант № 12

1. Всем участникам автопробега не повезло. 12 из них увязли в песке – пришлось толкать машину, 8 понадобилась замена колеса, у шестерых перегрелся мотор, пятеро и толкали машину и меняли колесо, четверо толкали машину и остужали мотор, трое меняли колесо и остужали мотор. Одному пришлось испытать все виды неполадок. Сколько было участников?

2. Пользуясь равносильными преобразованиями, установить, верно или неверно равенство: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap C$?

3. Доказать, что множество точек $A = \{y\colon y = 2^n, n = 1, 2, \dots\}$ счетно.

4. Найти все подмножества множества $A = \{m, n, h, d\}$.

5. Эквивалентны ли множества $A = \{(x, y)\colon y = x^3, 1 < x < 2\}$ и $B = \{(x, y)\colon y = 3^x, 3 < x < \infty\}$?

Вариант № 13

1. Из 10 участников ансамбля шестеро умеют играть на гитаре, пятеро – на ударных инструментах, пятеро – на духовых. Двумя инструментами владеют: гитарой и ударными – трое, ударными и духовыми – двое, гитарой и духовыми – четверо. Один человек играет на всех трех инструментах. Остальные участники ансамбля только поют. Сколько певцов в ансамбле?

2. Верно или неверно равенство: $\overline{(A \cup B)} \cap C) \cap \ \overline{A} \cap C \cup \overline{B} \cap C$?

3. Записать решение системы неравенств

$$\begin{cases} x-2 > 0 \\ x-5 < 0 \end{cases}$$

в виде пересечения двух множеств.

4. Найти все подмножества множества $G = \{a, c, d\}$.

5. Доказать, что множества $A = \{(x, y)\colon y = x^3, 1 < x < 2\}$ и $B = \{y\colon y = 3^x, 3 < x < \infty\}$ эквивалентны.

Вариант № 14

1. В одной студенческой группе 10 человек могут работать на Дельфи, 10 – на Паскале, 6 – на Си. По два языка знают: 6 человек – Дельфи и Паскаль, 4 – Паскаль и Си, 3 – Дельфи и Си. Один человек знает все три языка. Сколько студентов в группе?

2. Верно или неверно соотношение: $A \cap \overline{B} \cap C \subset A \cup B$?

3. Придумать пример множеств *A, B, C,* так, чтобы выполнялось равенство: $A \cup B = C$, причем *A*, *B*, и *C* – счетные множества.

4. Найти все подмножества множества $P = \{a, d\}$.

5. Эквивалентны ли множества $A = \{y\colon y = 3^x,\ 0 < x < \infty\}$ и $B = \{y\colon y = 3^n,\ n = 1, 2, \ldots\}$?

Вариант № 15

1. В день авиации на аэродроме всех желающих катали на самолете, планере, дельтаплане. На самолете прокатились 30 человек, на планере – 20, на дельтаплане – 15. И на самолете, и на планере каталось 10 человек, на самолете и дельтаплане – 12, На планере и дельтаплане – 5. Два человека прокатились и на самолете, и на планере, и на дельтаплане. Сколько было желающих прокатиться?

2. Верно или неверно равенство: $(A \cup B) \setminus A = B \setminus A$?

3. Привести пример двух множеств *A* и *B*, таких, что мощность множества *A* больше мощности множества *B*.

4. Найти все подмножества множества $H = \{c, d\}$.

5. Доказать, что множества $A = \{y\colon y = \ln x,\ 0 < x < \infty\}$ и $B = \{y\colon y = \sin x,\ -\infty < x < \infty\}$ эквивалентны.

Вариант № 16

1. Все грибники вернулись домой с полными корзинами. У десятерых из них в корзинах были белые грибы, у восемнадцати – подберезовики, у двенадцати – лисички. Белые и подберезовики были в шести корзинах, белые и лисички – в четырех, Подберезовики и лисички – в пяти. Все три вида грибов были у двух грибников. Сколько было грибников?

2. Верно или неверно равенство: $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap B$?

3. Доказать, что множество точек $A = \{(x, y)$: $y = |x|$, -, $-1 \le x \le 1\}$ несчетно.

4. Найти все подмножества множества $A = \{a, b, c, d\}$.

5. Пусть A – множество точек отрезка [0, 1], а B – множество всех точек числовой оси. Какие из следующих отношений справедливы: а) $A = B$; б) $A \sim B$; в) $A \supset B$; г) $A \supseteq B$; д) $A \not\subset B$; е) $A \in B$.

Вариант № 17

1. Все туристы взяли в поход консервы. Шесть человек взяли тушенку, пять – сгущенку, восемь – кашу (с мясом). У троих в рюкзаках была тушенка и сгущенка, у двоих – тушенка и каша, у троих – сгущенка и каша, и только в одном рюкзаке лежали все три вида консервов. Сколько было туристов?

2. Верно или неверно равенство: $\overline{(A \cup B)} \cap C \cap C \setminus (C \cap (A \cup B))$?

3. Пусть A – множество решений уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$. Записать это множество двумя различными способами.

4. Найти все подмножества множества $A = \{a, d\}$.

5. Эквивалентны ли множества $A = \{x$: $x^2 - 3x + 2 = 0\}$ и $B = \{2, 3\}$?

Вариант № 18

1. Было опрошено 70 человек. В результате опроса выяснили, что 45 человек знают английский язык, 29 – немецкий и 9 – оба языка. Сколько человек из опрошенных не знает ни английского, ни немецкого языков?

2. Верно или неверно равенство: $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap B$?

3. Найти все подмножества множества $F = \{a,b,c,d,e,f\}$.

4. Пусть A – множество решений уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$. Записать это множество двумя различными способами.

5. Счетно ли множество $\{(x, y)$: $y = 3^x$, $0 < x < \infty\}$?

Вариант № 19

1. В туристической группе 10 человек знают английский язык, 10 – итальянский, 6 – испанский. По два языка знают: 6 человек – английский и

итальянский, 4 – английский и испанский, 3 – итальянский и испанский. Один человек знает все три языка. Сколько туристов в группе?

2. Упростить $\overline{(A \cup B) \cap (A \cap B)}$.

3. Привести пример двух множеств A и B, таких, что мощность множества A больше мощности множества B.

4. Найти все подмножества множества $A = \{x, y, r, f, d\}$.

5. Эквивалентны ли множества $A = \{ 2^n, n = 1, 2, \ldots\}$ и $B = \{n^2, n = 1, 2, \ldots\}$?

Вариант № 20

1. Предприятие объявило набор рабочих на должности токаря, слесаря и сварщика. В отдел кадров обратились 25 человек. Из них 10 человек владели профессией токаря, 15 – слесаря, 12 – сварщика. Профессией и токаря и слесаря владели 6 человек, и токаря, и сварщика – 5 человек, и слесаря и сварщика – 3 человека. Сколько человек владеют всеми тремя профессиями?

2. Верно или неверно равенство: $\overline{C} \setminus \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \setminus \overline{(B \cup C)}$?

3. Привести примеры множеств A, B и C, для которых одновременно выполняются равенства $A \cup B \cup C = A$ и $A \cap B \cap C = C$.

4. Найти все подмножества множества $A = \{x, z\}$.

5. Можно ли построить взаимно-однозначное соответствие между множеством рациональных чисел отрезка [0, 1] и множеством рациональных чисел из этого интервала? Ответ обосновать.

Вариант № 21

1. Оказалось, что в группе туристов 15 человек были раньше во Франции, 19 – в Италии, 8 – в Германии. 9 туристов были во Франции и в Италии, 7 – во Франции и в Германии, 6 – и в Италии, и в Германии. 4 туриста были во всех трех странах. Сколько туристов были хотя бы в одной из трех стран?

2. Пользуясь равносильными преобразованиями, установить, верно или неверно равенство: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap \overline{C}$?

3. Привести примеры множеств A и B, для которых равенство $\overline{A} \cup B = \overline{A}$

а) выполняется; б) не выполняется.

4. Найти все подмножества множества $S = \{x, y, z, t, e\}$.

5. Найти мощность множества точек окружности с центром в точке (0, 0) и радиусом 1.

Вариант № 22

1. Группе студентов из 30 человек была предложена контрольная работа из трех задач. Первую задачу решили 15 студентов, вторую – 13, третью – 12. Первую и вторую задачи решили 7 человек, первую и третью – 6, вторую и третью – 5 человек. Все три задачи решили 2 студента. Сколько студентов из группы не решили ни одной задачи?

2. Пользуясь равносильными преобразованиями, установить, верно или неверно равенство: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap \overline{C}$?

3. Привести пример двух бесконечных множеств A и B, таких, что мощность множества A больше мощности множества B.

4. Найти все подмножества множества $D = \{y, z\}$.

5. Найти мощность множества точек гиперболы $y = \frac{1}{x-2}$ при $x \in (3, \infty)$.

Вариант № 23

1. Анализ историй болезней группы из 20 детей показало, что 10 детей болели ветрянкой, 6 – корью, 5 – свинкой. Ветрянкой и корью болели 3 ребенка, ветрянкой и свинкой – 3, корью и свинкой – 2. Всеми тремя болезнями болел один ребенок. Сколько детей не болели ни одной из перечисленных болезней?

2. Верно или неверно равенство: $\overline{(A \cup B)} \cap C) \cap \overline{A} \cap \overline{B} \cap C$?

3. Доказать, что множество точек $A = \{(x, y): y = |x+1|, -1 \le x \le 1\}$ несчетно.

4. Найти все подмножества множества $A = \{x, z\}$.

5. Пусть A – множество точек отрезка [1, 2], а B – множество точек интервала (0, 3). Какие из следующих отношений справедливы: а) $A = B$; б) $A \sim B$; в) $A \subset B$; г) $A \supseteq B$; д) $A \not\subset B$; е) $A \in B$.

Вариант № 24

1. В книжный киоск привезли для продажи 100 книг Пушкина, Лермонтова и Тургенева. Книги Пушкина купили 60 человек, книги Лермонтова – 50, книги Тургенева – 30 человек. Книги Пушкина и Лермонтова купили 40 человек, книги Пушкина и Тургенева – 20, книги Лермонтова и Тургенева – 10 человек. Пять человек купили книги всех трех писателей. Сколько человек не купили ни одной из перечисленных книг?

2. Верно или неверно равенство: $\overline{C} \setminus \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \setminus \overline{(B \cup C)}$?

3. Привести примеры множеств A, B и C таких, что равенство $A \cup B \cup C = C$

а) справедливо; б) несправедливо.

4. Найти все подмножества множества В= $\{x, y, z, k\}$.

5. Можно ли построить взаимно-однозначное соответствие между множеством натуральных чисел N и множеством действительных чисел отрезка [0, 1]? Ответ обосновать.

Вариант № 25

1. Группа научных работников состоит из 100 человек. Из них 70 человек владеют английским языком, 50 – немецким, 40 – французским, 30 – английским и немецким, 25 – английским и французским, 15 – французским и немецким. Хотя бы один язык знает каждый научный работник. Сколько человек владеют всеми тремя языками?

2. Упростить: $(A \setminus (A \cap B)) \cup B$.

3. Привести примеры множеств A, B и C так, чтобы $A \in B$, $B \subset C$.

4. Найти все подмножества множества $C = \{x, y\}$.

5. Можно ли утверждать, что множество всех положительных пятизначных чисел счетно? Ответ обосновать.

Вариант № 26

1. На курсы иностранных языков записалось 100 человек. Оказалось, что 70 человек будут изучать английский язык, 60 человек – французский и 30 человек - немецкий. Английский и французский собираются изучать 40 человек, английский и немецкий – 20, французский и немецкий – 10. Сколько студентов будут изучать все три языка?

2. Упростить равенство: $(A \cap C) \setminus (C \cap (A \cup B))$.

3. Привести пример двух различных бесконечных множеств A и B, таких, что мощность множества A равна мощности множества B.

4. В каком случае $A \cup B = A \cap B$?

5. Эквивалентны ли множества $A = \{x\colon x^3 - 1 = 0\}$ и $B = \{x\colon x^2 - 3x + 2 = 0\}$?

Вариант № 27

В команде бегунов десять спортсменов бегают на длинные дистанции, восемнадцать – на средние, двенадцать – на короткие. На длинные и средние дистанции бегают пять спортсменов, на средние и короткие – шесть. На длинные и короткие дистанции не бегает никто. Сколько бегунов в команде?

2. Верно или неверно равенство: $\overline{(A \cap B)} \cup C) \cap \ \overline{A} \cup \overline{B} \cup C$?

3. В каком случае $A \cup B = A \cap B$?

4. Эквивалентны ли множества $A = \{x\colon x^3 - 1 = 0\}$ и $B = \{x\colon x^2 - 3x + 2 = 0\}$?

5. Можно ли утверждать, что множество всех положительных чисел имеет меньшую мощность, чем множество всех действительных чисел? Ответ обосновать.

Вариант № 28

1. В студенческой группе 25 человек. Чтобы получить допуск на экзамен по данному курсу необходимо защитить курсовую работу, выполнить лабораторную работу и сдать зачет. 15 студентов защитили курсовую работу, 20 выполнили лабораторную работу, 17 сдали зачет. Защитили курсовую работу и выполнили лабораторную работу 12 человек. Защитили курсовую работу и сдали зачет 13 человек. Выполнили

лабораторную работу и сдали зачет 16 человек. Сколько студентов допущено к экзамену?

2. Упростить: $\overline{(A \cup B)} \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$.

3. Привести пример двух бесконечных множеств A и B, таких, что мощность множества A меньше мощности множества B.

4. Доказать, что множество точек $A = \{y: y = 2^n, n = 1, 2, \ldots\}$ счетно.

5. Эквивалентны ли множество рациональных чисел отрезка [0, 1] и множество рациональных чисел из этого интервала? Ответ обосновать.

Вариант № 29

1. В классе 20 детей. Из них 10 дополнительно занимаются в музыкальной школе, 6 – теннисом, 5 – китайским языком. Музыкальную школу и занятия по теннису посещают три ребенка, музыкой и китайским языком занимаются трое, теннисом и китайским языком двое. Всеми тремя видами дополнительных занятий занимается один ребенок. Сколько детей не занимается ни одним из перечисленных занятий?

2. Пользуясь равносильными преобразованиями, установить, верно или неверно равенство: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap \overline{C}$?

3. Доказать, что множество точек $A = \{y: y = 2^n, n = 1, 2, \ldots\}$ счетно.

4. Привести примеры множеств A, B и C , для которых одновременно выполняются равенства $A \cup B \cup C = A$ и $A \cap B \cap C = C$.

5. Эквивалентны ли множества $A = \{(x, y): y = x^2, 1< x <2\}$ и $B = \{(x, y): y = 2^x, 3< x < \infty\}$?

Вариант № 30

1. В цеху имеется 25 станков, которые могут выполнять три вида операций: A, B и C. Из них 10 станков выполняют операцию A, 15 – B, 12 – C. Операции A и B могут быть выполнены на 6 станках, A и C – на 5, B и C – на 3 станках. Сколько станков могут выполнять все три операции?

2. Верно или неверно равенство: $\overline{C} \setminus \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \setminus \overline{(B \cup C)}$?

3. Привести примеры множеств A, B и C , для которых одновременно выполняются равенства $A \cup B \cup C = A$ и $A \cap B \cap C = C$.

4. Доказать, что множество точек $A = \{y\text{: } y = 2^n, n = 1, 2, \ldots\}$ счетно.

5. Можно ли построить взаимно-однозначное соответствие между множеством действительных чисел отрезка [0, 1] и множеством действительных чисел интервала (0, 1)? Ответ обосновать.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Пусть $a \in A$. Следует ли отсюда, что $\{a\} \subseteq A$?
2. В каком случае $A \subseteq A \cap B$?
3. Назовите множество, которое является подмножеством любого множества.
4. Может ли быть множество эквивалентно своему подмножеству?
5. Мощность какого множества больше: множества натуральных чисел или множества точек отрезка [0, 1]?

Практическая работа№ 7 «Круги Эйлера решение задач»

Цель: *научиться применять круги Эйлера в решении задач.*

Задание к работе:

1. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{A} \cup \overline{B}$.
2. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(A \setminus B) \cap C$
3. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(A \setminus B) \cup C$
4. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
5. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(A \setminus B) \cup C$.
6. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(\overline{A} \cup \overline{B}) \setminus (A \cup B)$.
7. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $A \setminus (B \cap C)$.
8. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(A \cap B) \cup (C \setminus (A \cup B))$.
9. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $A \cap (B \cup C)$.
10. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(A \setminus B) \cap C$.
11. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{A} \cap (B \cup C)$.
12. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{(A \cup B)} \cap C)$.
13. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{A} \cap C \cup \overline{B} \cap C$.
14. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{A} \cap (B \cup C)$.
15. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(B \cap C) \setminus A$.
16. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{(A \cup B)} \cap C$.
17. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $C \setminus (C \cap (A \cup B))$.
18. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{C} \setminus \overline{(A \cup B)}$.
19. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $A \cap (B \cup \overline{C})$.
20. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $A \cap B \cap \overline{C}$.
21. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(B \cap C) \setminus A$.
22. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{A} \setminus \overline{(B \cup C)}$.
23. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{C} \setminus \overline{(A \cup B)}$.
24. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{(A \cup B)} \cap C)$.

25. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{A} \cup (B \cap C)$.

26. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{C} \setminus \overline{(A \cup B)}$.

27. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap B$.

28. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{(A \cup B)} \cap C$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что такое логическая переменная?
2. Что такое логическая функция?
3. Что такое таблица истинности?
4. Что такое логический элемент?

Тема 5 Графы

Практическая работа№ 8 «Графы. Способы задания графов. Степени вершин»

Цель: научиться задавать граф, вычислять степени вершин и цикломатическое число графа.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

Граф G - совокупность двух множеств: вершин V и ребер E, между которыми определено отношение инцидентности. Если |V(G)|=n, |E(G)|=m, то граф G есть (n,m) граф, где n - порядок графа, m - размер графа.

Каждое ребро e из E инцидентно ровно двум вершинам v', v'', которые оно соединяет. При этом вершина v' и ребро e называются инцидентными друг другу, а вершины v' и v'' называются смежными.

Ребро (v',v'') может быть ориентированным и иметь начало (v') и конец (v'') (дуга в орграфе).

Ребро (v,v) называется петлей (концевые вершины совпадают).

Граф, содержащий ориентированные ребра (дуги), называется орграфом.

Граф, не содержащий ориентированные ребра (дуги), называется неографом.

Ребра, инцидентные одной паре вершин, называются параллельными или кратными.

Конечный граф - число вершин и ребер конечно.

Пустой граф - множество ребер пусто (число вершин может быть произвольным).

Полный граф - граф без петель и кратных ребер, каждая пара вершин соединена ребром.

Локальная степень вершины - число ребер ей инцидентных.

В неографе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер (лемма о рукопожатиях). Петля дает вклад, равный 2 в степень вершины.

В орграфе сумма входящих ребер всех вершин равна сумме исходящих ребер всех вершин и равна числу ребер графа.

Графы равны, если множества вершин и инцидентных им ребер совпадают.

Графы, отличающиеся только нумерацией вершин и ребер, называются изоморфными.

Способы задания графов:

- явное задание графа как алгебраической системы;
- геометрический;
- матрица смежности;
- матрица инцидентности

Матрица инцидентности: По вертикали указываются вершины, по горизонтали - ребра. aij=1 если вершина i инцидентна ребру j, в противном случае aij=0. Если ребро - петля, то aij=2. Матрицей инцидентности (инциденций) ориентированного графа называется матрица, для которой aij=1, если вершина является началом дуги , aij= – 1, если является концом дуги , в остальных случаях aij=0.

Матрица смежности - квадратная симметричная матрица. По горизонтали и вертикали - все вершины. aij= число ребер, соединяющее вершины i,j. Матрицей смежности ориентированного графа называется матрица, для которой aij=1, если вершина является началом дуги, в остальных случаях aij=0.

Плоский граф - граф с вершинами, расположенными на плоскости и непересекающимися ребрами.

Вершины графа, которые не принадлежат ни одному ребру, называются изолированными.

Пусть в графе m - число ребер, n- число вершин, p – число компонент связности. Цикломатическим числом графа называют число $V = m – n + p$.

Компонента связности графа – некоторое множество вершин графа такое, что для любых двух вершин из этого множества существует путь из одной в другую, и не существует пути из вершины этого множества в вершину не из этого множества.

Пример выполнения

Исходные данные:

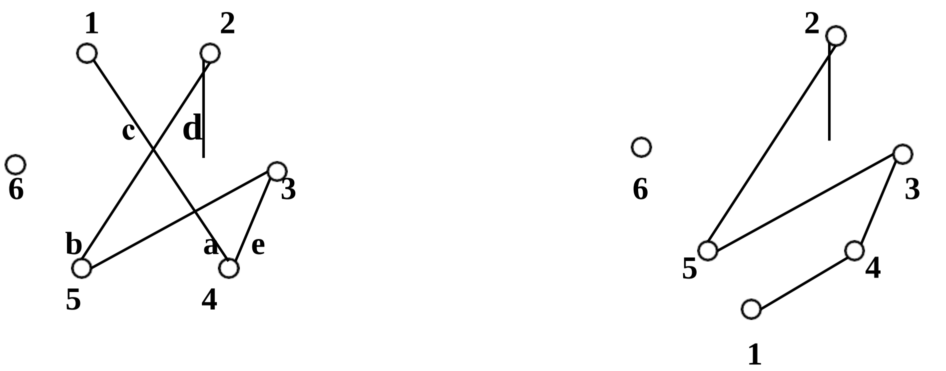
1. Задать неограф, представленный множеством вершин и ребер, графически и матрицами, преобразовать граф в плоский, вычислить степени его вер- шин.

$$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}; E = \{a; b; c; d; e\}$$

$$E = \{(1; 4); (2; 5); (2; 6); (3; 4); (3; 5)\}$$

Решение:

1. Изобразим граф, соединив вершины: Ребро a соединяет вершины 1 и 4, b соединяет вершины 2 и 5 и т. д. Затем преобразуем этот граф в плоский:



2. Составим матрицу смежности. В первом столбце и первой строке выпишем вершины. Ребру a инцидентны вершины 1 и 4, следовательно, в колонке 1 и строке 4 ставим 1, а также колонке 4 и строке 1 ставим 1. Ребру b инцидентны вершины 2 и 5, следовательно, в колонке 2 в строке 5 и колонке 5 строке 2 ставим 1 и т.д. Остальные ячейки таблицы содержат нули.

3. Составим матрицу инцидентности. В первом столбце выпишем вершины, первой строке – ребра. Ребру a инцидентны вершины 1 и 4, следовательно, в колонке a в строке 1 и строке 4 ставим 1. Ребру b инцидентны вершины 2 и 5, следовательно, в колонке b в строке 2 и строке 5 ставим 1 и т.д. Остальные ячейки таблицы заполняем нулями.

Матрица смежности

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	1
3	0	0	0	1	1	0
4	1	0	1	0	0	0
5	0	1	1	0	0	0
6	0	1	0	0	0	0

Матрица инцидентности

	a	b	c	d	e
1	1	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0
3	0	0	0	1	1
4	1	0	0	1	0
5	0	1	0	0	1
6	0	0	1	0	0

4. Вычислим степени вершин:

$\rho(1) = 1 \quad \rho(2) = 2 \quad \rho(3) = 2 \quad \rho(4) = 2 \quad \rho(5) = 2 \quad \rho(6) = 1$

$\rho(1) + \rho(2) + \rho(3) + \rho(4) + \rho(5) + \rho(6) = 10 = 2 \cdot q$

$q = 5$ (ребер 5)

5. Цикломатическое число графа: $V = 1 + 5 - 6 = 0$

Исходные данные:

2. Задать граф, представленный матрицей инцидентности, алгебраически, графически и матрицей смежности, преобразовать граф в плоский, вычислить степени его вершин.

	a	b	c	d	e	f
1	-1	-1	0	0	0	0
2	1	0	-1	1	0	0
3	0	0	0	-1	0	0
4	0	0	1	0	1	0
5	0	0	0	0	-1	-1
6	0	1	0	0	0	1

Решение:

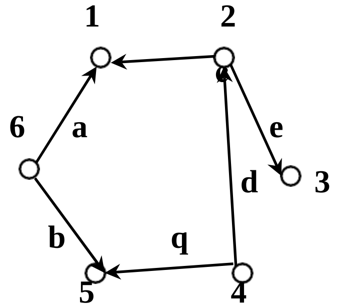
1. Количество вершин – 6. V = {1; 2; 3; 4; 5; 6}.

2. Ребро a выходит из вершины 2, т.к. в ячейке (2; 1) стоит 1, а приходит в вершину 1 (в ячейке (1; 1) находится -1) и т.д.

Получим множество E = {(2; 1); (6; 1); (4; 2); (2; 3); (4; 5); (6; 5)}

3. Изобразим граф, соединив вершины, этот граф уже плоский, т.к.

ребра не пересекаются:



4. Составим матрицу смежности.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	1	0

5. Вычислим степени вершин:

$\rho_1(1) = 0$ $\rho_2(1) = 2$

$\rho_1(2) = 2$ $\rho_2(2) = 1$

$\rho_1(3) = 0$ $\rho_2(3) = 1$

$\rho_1(4) = 2$ $\rho_2(4) = 0$

$\rho_1(5) = 0$ $\rho_2(5) = 2$

$\rho_1(6) = 2$ $\rho_2(6) = 0$

$\rho_1(1) + \rho_1(2) + \rho_1(3) + \rho_1(4) + \rho_1(5) + \rho_1(6) = 6$

$\rho_2(1) + \rho_2(2) + \rho_2(3) + \rho_2(4) + \rho_2(5) + \rho_2(6) = 6$

$q = 6$ (ребер 6)

6. Цикломатическое число графа: $V = 1 + 6 - 6 = 1$

<u>Практическая часть</u>

Практическая работа№ 8 «Графы. Способы задания графов. Степени вершин»

***Цель**: научиться задавать граф, вычислять степени вершин и цикломатическое число графа.*

Задание к работе

Вариант №1

1. Задать орграф, представленный множеством вершин и ребер, графически и матрицами, вычислить степени его вершин.

Орграф V = {1; 2; 3; 4; 5; 6}   E = {(1; 3); (1; 6); (2; 5); (3; 2); (3; 4); (4; 1); (4; 5); (5; 3); (6; 2)}

2. Задать граф, представленный матрицей инцидентности, алгебраически, графически и матрицей смежности, вычислить степени его вершин.

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	1	1	0	1	0	0
6	0	0	1	0	0	1	1	0	1

Вариант №2

1. Задать неограф, представленный множеством вершин и ребер, графически и матрицами, вычислить степени его вершин.

Неограф V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 5); (2; 3); (3; 1); (3; 4) (4; 2); (4; 5); (4; 6); (5; 3)}

1. Задать граф, представленный матрицей инцидентности, алгебраически, графически и матрицей смежности, вычислить степени его вершин.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
2	1	1	0	1	0	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0	0	1	0	1
4	0	0	0	0	1	1	1	0	0
5	1	0	0	0	0	1	0	1	0
6	0	0	1	1	0	0	0	0	0

Вариант №3

1. Задать орграф, представленный множеством вершин и ребер, графически и матрицами, вычислить степени его вершин.

Орграф V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 4); (1; 5); (2; 1); (2; 3); (3; 4);(4; 2); (4; 6); (5; 3); (6; 3)}

2. Задать граф, представленный матрицей инцидентности, алгебраически, графически и матрицей смежности, вычислить степени его вершин.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	-1	-1	0	0	0	0	0	1	0
2	0	0	-1	0	0	1	1	0	0
3	1	0	1	0	-1	0	0	0	0
4	0	0	0	-1	0	0	0	0	1
5	0	0	0	1	0	-1	0	-1	0
6	0	1	0	0	1	0	-1	0	-1

Вариант №4

1. Задать неограф, представленный множеством вершин и ребер, графически и матрицами, вычислить степени его вершин.

Неограф V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 3); (2; 3); (3; 1); (3; 6); (4; 2); (4; 5); (4; 6); (5; 1)}

2. Задать граф, представленный матрицей инцидентности, алгебраически, графически и матрицей смежности, вычислить степени его вершин.

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**
1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	-1	-1	0	0	0	1	0
3	1	0	1	0	-1	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	1	-1	0	0
5	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1
6	0	1	0	0	1	-1	0	0	0

Вариант №5

1. Задать орграф, представленный множеством вершин и ребер, графически и матрицами, вычислить степени его вершин.

Орграф V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 4); (2; 3); (3; 1); (3; 6);(4; 2); (4; 5); (5; 3); (6; 1)}

2. Задать граф, представленный матрицей инцидентности, алгебраически, графически и матрицей смежности, вычислить степени его вершин.

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1
2	1	1	0	0	0	0	0	1	0
3	0	1	0	0	1	0	1	0	0
4	0	0	1	0	0	1	0	1	0
5	0	0	1	1	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0	1	0	1

Вариант №6

1. Задать орграф, представленный множеством вершин и ребер, графически и матрицами, вычислить степени его вершин.

Орграф V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 5); (1; 6); (2; 1); (3; 2); (3; 4); (4; 2); (5; 4); (5; 3); (6; 3)}

2. Задать граф, представленный матрицей инцидентности, алгебраически, графически и матрицей смежности, вычислить степени его вершин.

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**
1	-1	-1	0	0	0	0	0	1	0
2	1	0	-1	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	-1	0	0	1	0	-1
4	0	0	1	0	1	0	0	0	1
5	0	0	0	0	-1	-1	0	1	0
6	0	1	0	0	0	1	-1	0	0

Вариант №7

1. Задать орграф, представленный множеством вершин и ребер, графически и матрицами, вычислить степени его вершин.

Орграф V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 6); (1; 5); (2; 1); (2; 4); (3; 5); (4; 1); (4; 6); (5; 6); (6; 3)}

2. Задать граф, представленный матрицей инцидентности, алгебраически, графически и матрицей смежности, вычислить степени его вершин.

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
2	1	1	0	1	0	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0	0	1	0	1
4	0	0	0	0	1	1	1	0	0
5	1	0	0	0	0	1	0	1	0
6	0	0	1	1	0	0	0	0	0

Вариант №8

1. Задать неограф, представленный множеством вершин и ребер, графически и матрицами, вычислить степени его вершин.

Неограф V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 3); (2; 3); (3; 1); (3;6); (4; 2); (4; 5); (4; 6); (5; 1)}

2. Задать граф, представленный матрицей инцидентности, алгебраически, графически и матрицей смежности, вычислить степени его вершин.

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
1	-1	-1	0	0	0	0
2	1	0	-1	1	0	0
3	0	0	0	-1	0	0
4	0	0	1	0	1	0
5	0	0	0	0	-1	-1
6	0	1	0	0	0	1

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какие операции называются бинарными и унарными? Приведите примеры унарных и бинарных операций в математике.
2. Поясните разницу между терминами “логическое выражение” и “логическая функция”.
3. Что такое вычислимое логическое выражение?
4. Что такое тавтология? противоречие? Приведите примеры.
5. Что такое равносильные выражения?

Третьяк Ирина Юрьевна

Тема 6 Логика предикатов

Практическая работа № 9 «Логические операции над предикатами»

Практическая работа № 10 «Кванторные операции»

Цель: научиться выполнять операции над предикатами; научиться ориентироваться в кваторах и выполнять над ними операции.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

1. Понятие предиката

В алгебре логики высказывания рассматриваются как нераздельные целые и только с точки зрения их истинности или ложности. Ни структура высказываний, ни их содержание не затрагиваются. В то же время и в науке, и в практике используются заключения, существенным образом зависящие как от структуры, так и от содержания используемых в них высказываний.

Например, в рассуждении «Всякий ромб - параллелограмм; *ABCD* - ромб; следовательно, *ABCD* - параллелограмм» посылки и заключение являются элементарными высказываниями логики высказываний и с точки зрения этой логики рассматриваются как целые, неделимые, без учета их внутренней структуры. Следовательно, алгебра логики, будучи важной частью логики, оказывается недостаточной в анализе многих рассуждений.

В связи с этим возникает необходимость в расширении логики высказываний, в построении такой логической системы, средствами которой можно было бы исследовать и структуру тех высказываний, которые в рамках логики высказываний рассматриваются как элементарные.

Такой логической системой является логика предикатов, содержащая всю логику высказываний в качестве своей части.

Логика предикатов расчленяет элементарное высказывание на субъект (буквально — подлежащее, хотя оно и может играть роль дополнения) и предикат (буквально - сказуемое, хотя оно может играть и роль определения).

Субъект — это то, о чем что-то утверждается в высказывании; *предикат* - это то, что утверждается о субъекте.

Например, в высказывании «7 - простое число», «7» -субъект, «простое число» - предикат. Это высказывание утверждает, что «7» обладает свойством «быть простым числом».

Если в рассмотренном примере заменить конкретное число 7 переменной x из множества натуральных чисел, то получим *высказывательную форму «x* - простое число». При одних значениях x, (например, x = 13, x =17) эта форма дает истинные высказывания, а при других значениях x (например, $x = 10$, x = 18) эта форма дает ложные высказывания.

Ясно, что эта высказывательная форма определяет функцию одной переменной x, определенной на множестве N, и принимающую значения из множества {1,0}.

Здесь предикат становится функцией субъекта и выражает свойство субъекта.

Определение. Одноместным предикатом P(x) называется произвольная функция переменного x, определенная на множестве M и принимающая значения из множества {1,0}.

Множество M, на котором определен предикат P(x) , называется областью определения предиката.

Множество всех элементов $x \in M$, при которых предикат принимает значение «истина», называется множеством истинности предиката P(x), то есть множество истинности предиката P(x) - это множество 1p = $\{x \mid x \in M, P(x) = 1\}$.

Так, предикат -P(x) - «x - простое число» определен на множестве N, а множество Ip для него есть множество всех простых чисел.

Предикат Q{x} - « $\sin x = 0$ » определен на множестве R, а его множество истинности $I_Q = \{x \mid x = \pi k; k \in Z\}$.

Предикат F(x) - «Диагонали параллелограмма x перпендикулярны» определен на множестве всех параллелограммов, а его множеством истинности является множество всех ромбов.

Приведенные примеры одноместных предикатов выражают свойства предметов.

Рассмотрим примеры предикатов:

P(x): «$x^2 + 1 > 0, x \in R$»; область определения предиката M= R и область истинности – тоже R, т.к. неравенство верно для всех действительных чисел. Таким образом, для данного предиката $M = I_p$. Такие предикаты называются тождественно истинными.

B(x): «$x^2 + 1 < 0, x \in R$»; область истинности $I_p = \varnothing$, т.к. не существует действительных чисел, для которых выполняется неравенство. Такие предикаты называются тождественно ложными.

Определение. Предикат P(x), определенный на множестве M, называется тождественно истинным (тождественно ложным), если 1p = M (1p = $\varnothing$).

Предикат $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ – тождественно истинный, предикат $\sqrt{x-3} = -3$ - тождественно ложный.

Естественным обобщением понятия одноместного предиката является понятие многоместного предиката, с помощью которого выражаются отношения между предметами.

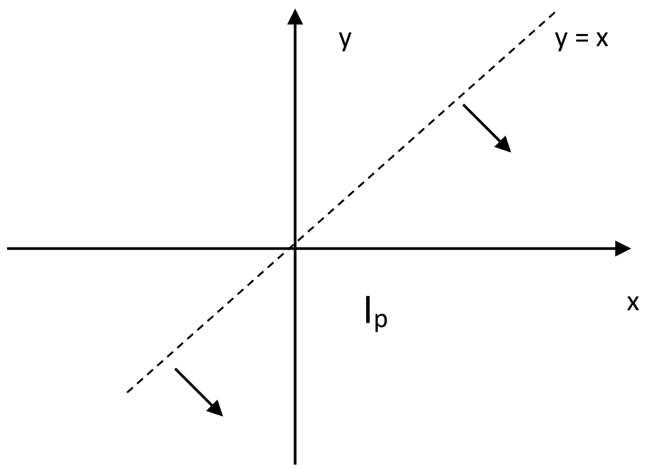
Примером отношения между двумя предметами является отношение «меньше» («больше»). Пусть это отношение введено на множестве Z целых чисел. Оно может быть охарактеризовано высказывательной формой «$x < y$»(«$x > y$») , где $x, y \in Z$, то есть является функцией двух переменных P(x, y), определенной на множестве Z x Z с множеством значений {1,0}.

Определение. Двухместным предикатом P(x,y) называется функция двух переменных x и y (субъекты предиката), определенная на множестве $M = M_1 \times M_2$ ($x \in M_1$, $y \in M_2$) и принимающая значения из множества {1,0}.

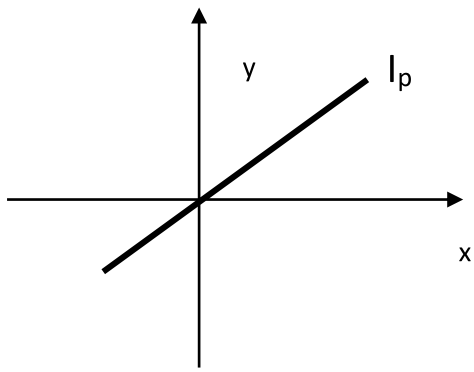
Найдем значения предиката «x < y» , где x, y ∈ Z для пар (2,1), (4,4), (3,7):

Вместо x и y подставим указанные значения: P(2,1) = 0, т.к. 2>1; P(4,4)=0, т.к. 4 = 4; P(3,7)=1, т.к. 3<7. областью истинности этого предиката является множество всех пар целых чисел, удовлетворяющих данному неравенству.

Рассмотрим этот же предикат, но с областью определения M = R^2, тогда область его истинности можно представить графически: это все точки части плоскости (открытая, бесконечная область), лежащей ниже прямой y = x.



В числе примеров двухместных предикатов можно назвать предикаты: Q(x, y): « x = y » -предикат равенства, определенный на множестве M = R x R, область истинности которого – все точки прямой y = x :



Предикат F(x,y): «x//y»- прямая x параллельна прямой y, определенный на множестве прямых, лежащих на данной плоскости.

Аналогично определяется n -местный предикат.

Определение: n – местным предикатом называется функция $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенная на множестве $M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ и принимающая на этом множестве значение из множества {1, 0}.

Предикат P(x) является следствием предиката Q(x) ($Q(x) \to P(x)$), если $I_Q \subset I_P$.

Предикаты P(x) и Q(x) равносильны ($Q(x) \leftrightarrow P(x)$), если $I_Q = I_P$.

Для n –местных предикатов вводятся аналогичные понятия.

Примеры:

1. На множестве M= {3,4,5,6,7,8} заданы предикаты P(x): «x – простое число», Q(x): «x – нечетное число». Составить таблицы истинности. Равносильны ли предикаты на множестве а) M; б) L = {2,3,4,5,6,7,8}; в) K = {3,4,5,6,7,8,9}?

Составим таблицы истинности предикатов на данных множествах:

M	P(x)	Q(x)	L	P(x)	Q(x)	K	P(x)	Q(x)
3	1	1	2	1	0	3	1	1
4	0	0	3	1	1	4	0	0
5	1	1	4	0	0	5	1	1
6	0	0	5	1	1	6	0	0
7	1	1	6	0	0	7	1	1
8	0	0	7	1	1	8	0	0
			8	0	0	9	0	1

На множестве M $I_P = I_Q$, следовательно, на этом множестве предикаты равносильны. На множествах L и K условие равносильности не соблюдается.

2. Будут ли предикаты равносильны или один из них является следствием другого, если область определения R?

$$a).P(x,y): \sqrt{x}\sqrt{y} = 15; Q(x,y): \sqrt{xy} = 15.$$

Область допустимых значений x и y для P(x, y) : x>0 и y>0; область истинности – все точки ветви гиперболы y = 15/x, лежащей в первой четверти .Область допустимых значений x и y для Q(x, y): x>0 и y>0, или x<0 и y<0; область истинности – все точки обеих ветвей гиперболы y = 15/x.

Значит, $I_P \subset I_Q$ и предикат Q(x) является следствием предиката P(x).

б) P(x): «$x^2 \leq 0$», Q(x): «$2^{|x|} = \cos x$».

Область истинности предиката P(x): x =0, область истинности предиката Q(x): x = 0.

Значит, $I_P = I_Q$ и предикаты равносильны.

2. Логические операции над предикатами

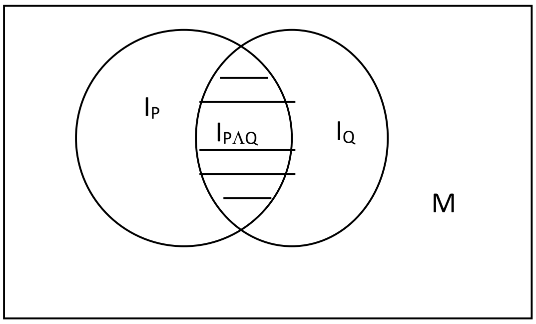
Предикаты, так же, как высказывания, принимают два значения истина и ложь (1, 0), поэтому к ним применимы все операции логики высказываний.

Рассмотрим применение операций логики высказываний к предикатам на примерах одноместных предикатов.

Пусть на некотором множестве *M* определены два предиката -P(x) и Q(x).

Определение: Конъюнкцией двух предикатов P(x) и Q(x) называется новый предикат P(x)ΛQ{x), который принимает значение «истина» при тех и только тех значениях x $\in$ M, при которых каждый из предикатов принимает значение «истина», и принимает значение «ложь» во всех остальных случаях.

Областью истинности предиката P(x)ΛQ(x) является общая часть областей истинности предикатов P(x) и Q(x), то есть: $I_{P\wedge Q} = I_P \cap I_Q$ *. Соответствующая диаграмма имеет вид:*



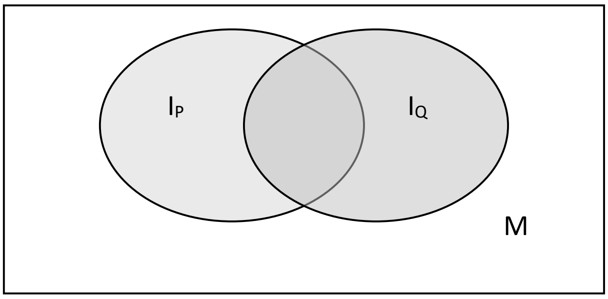
Примеры:

Для предикатов P(x): «x – четное число» и Q(x):«x кратно 3» конъюнкцией P(x)ΛQ(x) является предикат «x - четное число и x кратно 3», то есть предикат «x делится на 6» и область истинности $I_{P\wedge Q} = I_P \cap I_Q = \{2, 4, 6,\ldots,2n, \ldots\} \cap \{3, 6, 9, 12,\ldots, 3n, \ldots\}=\{6, 12, 18, \ldots, 6n, \ldots\}$.

Определение. Дизъюнкцией двух предикатов P(x) и Q(x) называется новый предикат P(x)V Q(x), который принимает значение «ложь» при тех и только тех значениях x $\in$ *M, при которых каждый из предикатов принимает значение «ложь» и принимает значение «истина» во всех остальных случаях.*

Областью истинности предиката P(x)V Q(x) является объединение областей истинности предикатов P(x) и Q(x), то есть : $I_{PVQ} = I_p \cup I_Q$.

Диаграмма:



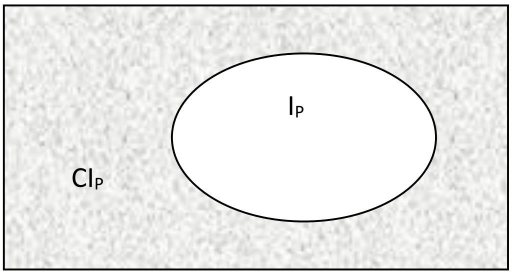
Пример: Для предикатов P(x) и Q(x) областью истинности их дизъюнкции является объединение их областей истинности:

$I_{PVQ} = I_p \cup I_Q=\{2, 4, 6,\ldots,2n, \ldots\}\cup \{3, 6, 9, 12,\ldots, 3n, \ldots\} = \{2, 3, 4, 6,\ldots, 2n, 3n, \ldots\}$.

Определение. Отрицанием предиката P(x) называется новый предикат $\overline{P}(x)$, *который принимает значение «истина» при всех значениях x* $\in$ *M, при которых предикат P(x) принимает значение «ложь», и принимает значение «ложь» при тех значениях x* $\in$ *M, при которых предикат P(x) принимает значение «истина».*

Из этого определения следует, что $I_{\overline{P}} = M \setminus I_P = CI_P$.

Диаграмма:

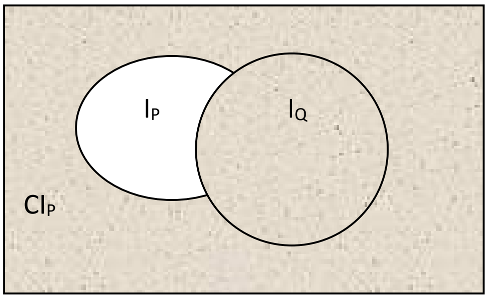


Пример: составим предикат $\overline{P}(x)$: «x – нечетное число», его область истинности: $I_{\overline{P}} = CI_P = \{1,3,5,\ldots,2n-1,\ldots\}$.

Определение . Импликацией предикатов P{x) и Q(x) называется новый предикат P(x)→ Q(x), который является ложным при тех и только тех значениях x ∈ M, при которых одновременно P(x) принимает значение «истина», а Q(x) - значение «ложь» и принимает значение «истина» во всех остальных случаях.

Так как при каждом фиксированном x ∈ M справедлива равносильность $P(x) \to Q(x) \equiv \overline{P}(x) \vee Q(x)$, *то* $I_{P\to Q} = I_{\overline{P}} \cup I_Q = CI_P \cup I_Q$.

Диаграмма: области истинности соответствует заштрихованная часть:



Рассмотрим несколько примеров на нахождение областей истинности предикатов.

1. На множестве M = {1,2,3,4,…,20} заданы предикаты:

A(x): «x не делится на5», B(x): «x- простое число», C(x): «x кратно 3». Найти множество истинности предиката: $A(x)B(x) \to \overline{C}(x)$.

Найдем области истинности предикатов A(x), B(x) и $\overline{C}(x)$ - «x не кратно 3»:

I_A = {1,2,3,4,6,7,8,9,11,12,13,1,14,16,17,18,19};

I_B = {2,3,5,7,11,13,17,19};

$CI_c = \{1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17,19,20\}$.

В предикате заменим импликацию : $\overline{A(x)B(x)} \vee \overline{C}(x)$.

Предикату соответствует формула алгебры множеств: $C(I_A \cap I_B) \cup CI_C$.

$I_A \cap I_B = \{2,3,7,11,13,17,19\}$;
$C(I_A \cap I_B) = \{1,4,5,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20\}$;
$C(I_A \cap I_B) \cup CI_c = \{1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$.

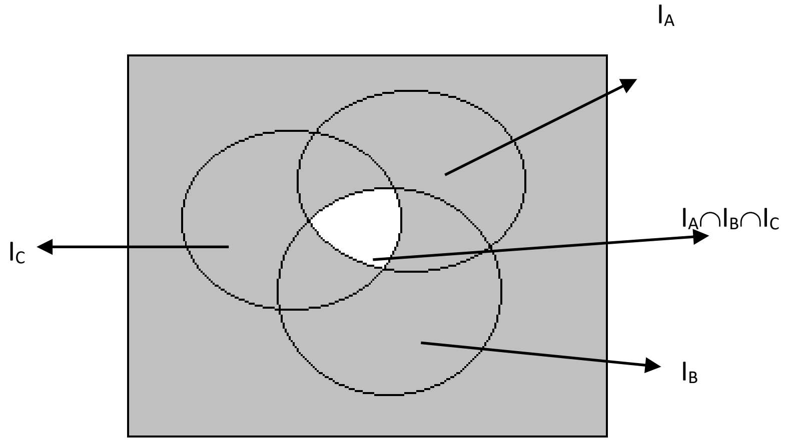
2. Изобразить на диаграмме Эйлера – Венна область истинности предиката: а) $A(x)B(x) \to \overline{D}(x)$.

Сначала выполним преобразования, рассматривая предикат как высказывание:

$$A(x)B(x) \to \overline{D}(x) \equiv \overline{A(x)C(x)} \vee \overline{D}(x) \equiv \overline{A(x)B(x)D(x)}.$$

Предикату соответствует область истинности, определяемая формулой алгебры множеств:

$C(I_A \cap I_B \cap I_C)$. Диаграмма имеет вид:



Область истинности предиката окрашена серым цветом.

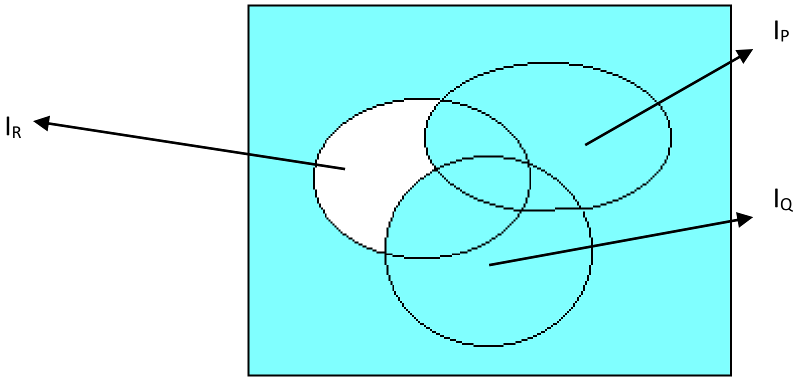
$(P(x) \to Q(x)) \vee R(x)\overline{Q}(x)$.

Выполним преобразования:

$(P(x) \to Q(x)) \vee R(x)\overline{Q}(x) \equiv \overline{P}(x) \vee Q(x) \vee R(x)\overline{Q}(x)$.

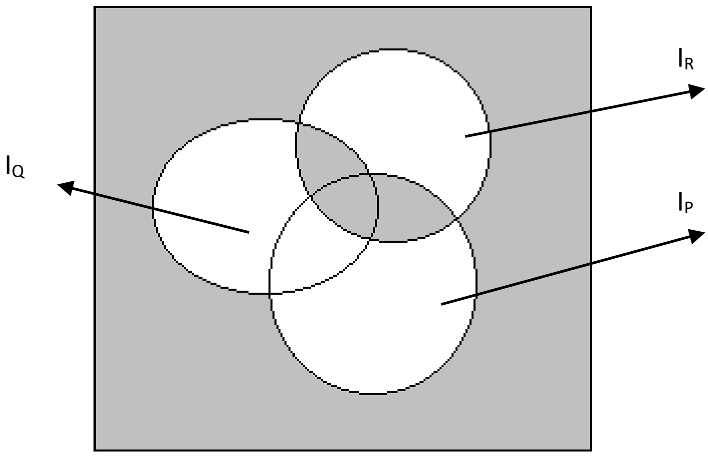
Предикату соответствует область истинности, определяемая формулой алгебры множеств:

$CI_P \cup I_Q \cup I_R \cap CI_Q = (CI_P \cup I_Q \cup I_R) \cap (CI_P \cup I_Q \cup CI_Q) = (CI_P \cup I_Q \cup I_R) \cap U = CI_P \cup I_Q \cup I_R$. Соответствующая диаграмма:



Область истинности предиката окрашена .

3. Записать предикат, полученный в результате логических операций над предикатами P(x), Q(x), R(x), области истинности которых заштрихованы:



Так как область истинности $I = C(I_P \cup I_Q \cup I_R) \cup I_Q \cap I_R \cup I_R \cap I_P$, то предикат имеет вид

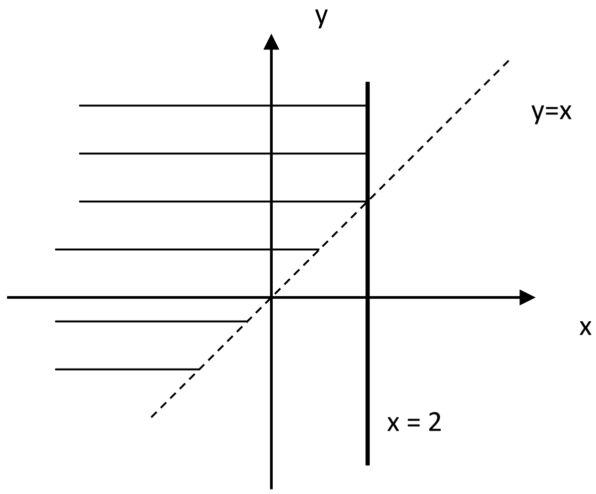
$$\overline{P(x) \vee Q(x) \vee R(x)} \vee Q(x)R(x) \vee R(x)P(x) \equiv (P(x) \vee Q(x) \vee R(x)) \to R(x)(Q(x) \vee P(x)).$$

4. Изобразить на координатной плоскости область истинности предиката

$a).\overline{x > 2} \wedge (x < y).$

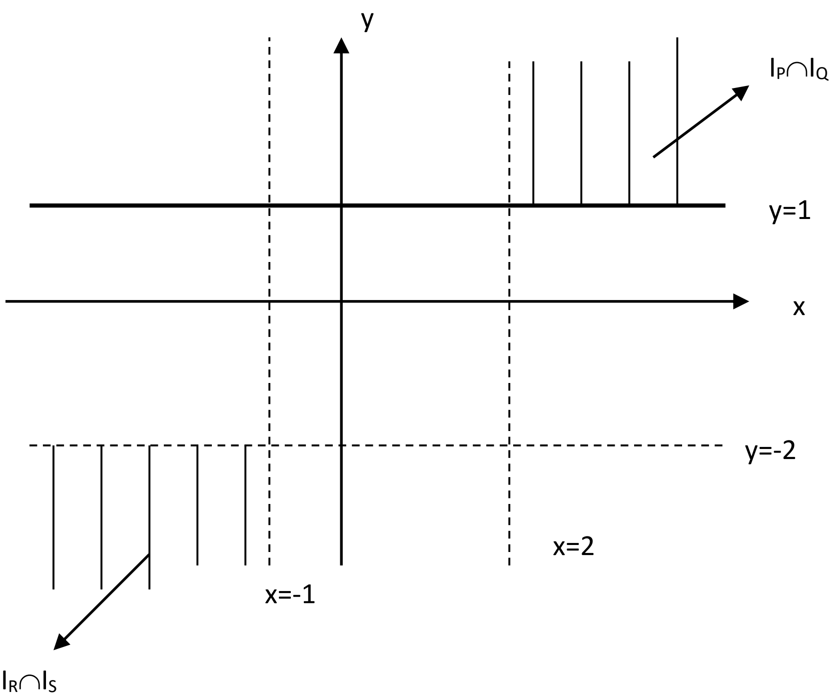
Выполним преобразования: $\overline{x > 2} \wedge (x < y) \equiv (x \le 2) \wedge (x < y).$

Область истинности предиката $x \le 2$ - часть плоскости, расположенная левее прямой $x = 2$ и все точки этой прямой (изобразим ее сплошной линией). Область истинности предиката $x < y$ – часть плоскости, расположенная выше прямой y = x без этой прямой (изобразим ее пунктирной линией). Область истинности данного предиката – пересечение описанных областей истинности:



б) ((x>2)(y≥1))V((x<-1)(y<-2)). Составим соответствующую формулу алгебры множеств, обозначив (x>2)= P(x,y), (y≥1)= Q(x,y), (x<-1)= R(x,y), (y<-2)= S(x,y):

$I = I_P \cap I_Q \cup I_R \cap I_S$. Область истинности заштрихована:



1. <u>Кванторные операции.</u>

Пусть имеется предикат P(x), определенный на множестве M. Если *a* - некоторый элемент из множества M, то подстановка его вместо x в предикат

$P(x)$ превращает этот предикат в высказывание - $P(a)$. Такое высказывание называется единичным. Наряду с образованием из предикатов единичных высказываний в логике предикатов рассматривается еще две операции, которые превращают одноместный предикат в высказывание.

Квантор всеобщности. Пусть $P(x)$ — предикат, определенный на множестве М. Под выражением $\forall x P(x)$ понимают высказывание, истинное, когда $P(x)$ истинно

для каждого элемента x из множества М и ложное, в противном случае. Это высказывание уже не зависит от x.

Соответствующее ему словесное выражение будет: «Для всякого x $P(x)$ истинно». Символ $\forall$ называют квантором всеобщности.

Переменную x в предикате $P(x)$ называют свободной (ей можно придавать различные значения из М), в высказывании $\forall x P(x)$ переменную x называют связанной квантором $\forall$.

Квантор существования. Пусть $P(x)$ — предикат, определенный на множестве М. Под выражением $\exists x P(x)$ понимают высказывание, которое является истинным, если существует элемент $x \in M$, для которого $P(x)$ истинно, и ложным в противном случае. Это высказывание уже не зависит от x.

Соответствующее ему словесное выражение будет: «Существует x, при котором $P(x)$ истинно». Символ $\exists$ называют квантором существования. В высказывании $\exists x P(x)$ переменная x связана квантором $\exists$.

Приведем пример употребления кванторов. Пусть на множестве N натуральных чисел задан предикат $P(x)$: «Число x кратно 5». Используя кванторы, из данного предиката можно получить высказывания: $\forall x \in N\ P(x)$ - «Все натуральные числа кратны 5»; $\exists x \in N\ P(x)$ — «Существует натуральное число, кратное 5». Очевидно, первое из этих высказываний ложно, а второе истинно.

Ясно, что высказывание $\forall$ x P(x) истинно только в том единственном случае, когда P(x) - тождественно истинный предикат, а высказывание $\exists$x P(x) ложно только в том единственном случае, когда P(x) — тождественно ложный предикат.

Кванторные операции применяются и к многоместным предикатам. Пусть, например, на множестве M задан двухместный предикат P(x,y). Применение кванторной операции к предикату P(x,y) по переменной x ставит в соответствие двухместному предикату P(x,y) одноместный предикат $\forall$x P(x, y} (или одноместный предикат $\exists$x P(x, y)), зависящий от переменной y и не зависящий от переменной x. К ним можно применить кванторные операции по переменной y, которые приведут уже к высказываниям следующих видов:

$\forall y \forall x P(x,y)$, $\exists y \forall x P(x,y)$, $\forall y \exists x P(x,y)$, $\exists y \exists x P(x,y)$.

Например, рассмотрим предикат P(x, y): « x кратно y », определенный на множестве N. Применение кванторных операций к предикату P(x,y) приводит к восьми возможным высказываниям:

1. $\forall y \forall x P(x,y)$ - «Для всякого *y* и для всякого x *y* является делителем x».

2. $\exists y \forall x P(x,y)$ - «Существует *y,* которое является делителем всякого *x».*

3. $\forall y \exists x P(x,y)$- «Для всякого *y* существует *x* такое, что *x* делится на y».

4. $\exists y \exists x P(x,y)$ - «Существует *y* и существует *x* такие, что *y* является делителем x».

5. $\forall x \forall y P(x,y)$ - «Для всякого *x* и для всякого *y y* является делителем *x».*

6. $\forall x \exists y P(x,y)$ - «Для всякого *x* существует такое y, что *x* делится на y».

7. $\exists x \exists y P(x,y)$ - «Существует *x* и существует *y* такие, что *y* является делителем x».

8. $\exists x \forall y P(x,y)$ - «Существует *x* такое, что для всякого *y x* делится на y».

Высказывания 1, 5 и 8 ложны, а высказывания 2, 3, 4, 6 и 7 истинны.

Из рассмотренных примеров видно, что в общем случае изменение порядка следования кванторов изменяет смысл высказывания, а значит, и его логическое значение (например, высказывания 3 и 8).

Рассмотрим предикат – P(x), определенный на множестве $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, содержащем конечное число элементов. Если предикат *P(x)* является тождественно истинным, то истинными будут высказывания $P(a_1)$, $P(a_2), \dots, P(a_n)$. При этом истинными будут высказывание $\forall x P(x)$ и конъюнкция $P(a_1)\ P(a_2) \dots P(a_n)$.

Если хотя бы для одного элемента $a_k \in M$ $P(a_k)$ окажется ложным, то ложными будут высказывание $\forall x P(x)$ и конъюнкция $P(a_1)\ P(a_2) \dots P(a_n)$. Значит, справедлива равносильность:

$\forall x P(x) \equiv P(a_1)\ P(a_2) \dots P(a_n)$.

Аналогичным образом можно доказать справедливость равносильности:

$\exists x P(x) \equiv P(a_1) V P(a_2) V \dots V P(a_n)$.

Значит, кванторные операции можно рассматривать как обобщение операций конъюнкции и дизъюнкции на случай бесконечных областей.

Примеры:

1. Какие из следующих высказываний тождественно ложные , а какие тождественно истинные, если область определения M = R?

а) $\exists x\ (x + 5 = x + 3)$ – тождественно ложное высказывание, т.к. ни при каком x равенство неверно;

б) $\forall x\ (x^2 + x + 1 > 0)$ – тождественно истинное высказывание: левую часть неравенства перепишем в виде $(x + ½)^2 + ¾$, эта сумма больше нуля при любом x;

в) $\exists x\ ((x^2 - 5x + 6 \geq 0)(x^2 - 2x + 1 > 0))$ – высказывание тождественно истинное, если пересечение областей истинности логически умножаемых предикатов не пусто, и ложное, в противном случае.

Первое неравенство представим в виде $(x-2)(x-3)\geq 0$, решением которого являются $x\in(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$.

Второе неравенство представим в виде $(x-1)^2>0$. решением которого являются все $x\neq 0$.

Пересечение областей истинности: $(-\infty;0)\cup(0;2]\cup[3;+\infty)\neq\varnothing$, значит, высказывание тождественно истинное.

2. Предикат P(x, y): «x<y» определен на множестве $M=N\times N$.

а) какие из предикатов тождественно истинные, какие тождественно ложные: $\exists xP(x,y)$, $\forall xP(x,y)$, $\exists yP(x,y)$, $\forall yP(x,y)$?

$\exists xP(x,y)$ – не является ни тождественно истинным, ни тождественно ложным: при $y=1$ $\exists xP(x,y)=0$, т.к. нет натурального числа меньше 1; при $y>1$ $\exists xP(x,y)=1$, например, $x=1$. значит, область истинности предиката $y>1$.

$\forall xP(x,y)$ – тождественно ложный предикат, т.к. какое бы y не задать, среди натуральных чисел найдутся те, которые больше или равны y.

$\exists yP(x,y)$ – тождественно истинный, т.к. для всякого каждого натурального числа можно найти большее натуральное число.

$\forall yP(x,y)$ – тождественно ложный, т.к. какое бы x не задать, среди натуральных чисел найдутся те, которые меньше или равны x.

б) какие из высказываний истинные, какие ложные:

$\exists x\forall yP(x,y)$; $\forall x\exists yP(x,y)$.

$\exists x\forall yP(x,y)$ – ложное высказывание, т.к. не существует натурального x меньшего любого натурального y (для $y=1$).

$\forall x\exists yP(x,y)$ – истинное высказывание, т.к. для любого натурального x существует большее натуральное число y.

3. Предикаты A(x, y) и B(y, z) определены на множестве MxM, где M={a, b, c}. Записать формулу $\exists xA(x,y)\forall zB(y,z)$ без кванторных операций. Предикат $\exists xA(x,y)$ равносилен дизъюнкции $A(a,y)\ vA(b,y)\ vA(c,y)$. Предикат $)\forall zB(y,z)$ равносилен конъюнкции $B(y,a)\Lambda\ B(y,b)\ \Lambda B(y,c)$. Тогда справедлива равносильность:

$\exists xA(x, y)\forall zB(y, z) \equiv (A(a, y) \vee A(b, y) \vee A(c, y)) \wedge B(y, a) \wedge B(y, b) \wedge B(y, c)$.

2. Формулы логики предикатов.

В логике предикатов будем пользоваться следующей символикой:

1. Символы *p, q, r, ...* — переменные высказывания, принимающие два значения: 1 - истина, 0 — ложь.

2. Предметные переменные - *x, y, z, ...* которые пробегают значения из некоторого множества *M; x°, y°, z°, ...* -предметные константы, то есть значения предметных переменных.

4. $P(\cdot)$, $F(\cdot)$ - одноместные предикатные переменные; $Q(\cdot,\cdot,...,\cdot)$, $R(\cdot,\cdot,...,\cdot)$ n-местные предикатные переменные. $P^0(\cdot)$, $Q^0(\cdot, \cdot, ..., \cdot)$ - символы постоянных предикатов.

5. Символы логических операций: $\wedge$, v, $\rightarrow$,- .

6. Символы кванторных операций: $\forall x$, $\exists x$.

7. Вспомогательные символы: скобки, запятые.

Определение формулы логики предикатов:

1. Каждое высказывание как переменное, так и постоянное, является формулой (элементарной).

2. Если $F(\cdot,\cdot,...,\cdot)$ – n- местная предикатная переменная или постоянный предикат, а x_1, x_2, …, x_n - предметные переменные или предметные постоянные (не обязательно все различные), то $F(x_1, x_2, …, x_n)$ есть формула. Такая формула называется элементарной, в ней предметные переменные являются свободными, не связанными кванторами.

3. Если *A* и *B* — формулы, причем такие, что одна и та же предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой - свободной, то слова $A \vee B$, $A \& B$, $A \rightarrow B$ есть формулы. В этих формулах те переменные, которые в исходных формулах были свободными, являются свободными, а те, которые были связанными, являются связанными.

4. Если *A* - формула, то $\overline{A}$ - формула, и характер предметных переменных при переходе от формулы *A* к формуле $\overline{A}$ не меняется.

5. Если A(x) - формула, в которую предметная переменная x входит свободно, то слова $\forall x A(x)$ и $\exists x A(x)$ являются формулами, причем предметная переменная входит в них связанно.

6. Всякое слово, отличное от тех, которые названы формулами в пунктах 1-5, не является формулой.

Например, если P(x) и Q(x, y) - одноместный и двухместный предикаты, а q, r - переменные высказывания, то формулами будут слова: q, P(x), P(x)Q(x°,y),

$\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x, y)$, $(\overline{Q(x, y)} \vee q) \rightarrow r$.

Не является формулой слово: $\forall x Q(x, y) \rightarrow P(x)$. Здесь нарушено условие п.3, так как в формулу $\forall x Q(x, y)$ переменная x входит связано, а в формулу P(x) переменная x входит свободно.

Выражение $\forall y(\exists y P(x,y)) V Q(x)$ не является формулой, т.к. квантор всеобщности на y навешан на формулу $\exists y P(x,y)$, в которой переменная y уже связана квантором существования.

Выражение $\forall y$, xP(x, y) не является формулой, т.к. переменной x не присвоен квантор.

Из определения формулы логики предикатов ясно, *что всякая формула алгебры высказываний является формулой логики предикатов.*

3. <u>Значение формулы логики предикатов.</u>

О логическом значении формулы логики предикатов можно говорить лишь тогда, когда задано множество M, на котором определены входящие в эту формулу предикаты. Логическое значение формулы логики предикатов зависит от значений трех видов переменных: 1) значений входящих в формулу переменных высказываний, 2) значений свободных предметных переменных из множества M, 3) значений предикатных переменных.

При конкретных значениях каждого из трех видов переменных формула логики предикатов становится высказыванием, имеющим истинное или ложное значение.

Рассмотрим формулу $\exists y \forall z(P(x,y) \rightarrow P(y,z))$. Двухместный предикат P(x,y) определен на множестве M x M, где M = {0,l,2,...,n,..}. В формулу входит переменный предикат P(x,y), предметные переменные x, y, z, две из которых y и z — связанные кванторами, а x - свободная.

Возьмем за конкретное значение предиката P(x,y) фиксированный предикат P^0 (x,y): «x<y», а свободной переменной x придадим значение $x^0 = 5 \in M$. Тогда при значениях y, меньших $x^0 = 5$ предикат $P^0(x^0,y)$ принимает значение ложь, а импликация $P(x, y) \rightarrow P(y, z)$ при всех $z \in M$ принимают значение истина, то есть высказывание $\exists y \forall z(P^0(x,y) \rightarrow P^0(y,z))$ имеет значение «истина».

Рассмотрим еще пример на вычисление значения формулы.

Дана формула $\forall x(P(x)Q(x) \rightarrow R(x))$, где предикаты определены на множестве N. Найти ее значение, если P(x): «x делится на 3», Q(x): «x делится на 4», R(x): «x делится на 2».

Данная формула является высказыванием, т.к. x связанная переменная. Следовательно, значение формулы будет зависеть только от значений предикатных переменных. P(x)Q(x)- означает, что x делится на 12. Тогда предикат $P(x)Q(x) \rightarrow R(x)$: «если x делится на 12, то x делится на 2» - тождественно истинный, следовательно формула $\forall x(P(x)Q(x) \rightarrow R(x)$ принимает значение «истина».

4. Равносильные формулы логики предикатов.

Определение 1. Две формулы логики предикатов A и B называются равносильными на области M, если они принимают одинаковые логические значения при всех значениях входящих в них переменных, отнесенных к области M.

Определение 2. Две формулы логики предикатов A и B называются равносильными, если они равносильны на всякой области.

Здесь, как в алгебре высказываний, для равносильных формул принято обозначение $A \equiv B$.

Ясно, что все равносильности алгебры высказываний будут верны, если в них вместо переменных высказываний подставить формулы логики предикатов. Но, кроме того, имеют место равносильности самой логики предикатов. Рассмотрим основные из этих равносильностей. Пусть A(x) и B(x) - переменные предикаты, а C - переменное высказывание. Тогда:

1. $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$;
2. $\overline{\exists x A(x)} \forall x \overline{A(x)}$;
3. $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{\overline{A(x)}}}$;
4. $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{\overline{A(x)}}}$;
5. $\forall x A(x) \& \forall x B(x) \equiv \forall x [A(x) \& B(x)]$;
6. C&$\forall x B(x) \equiv \forall x [C \& B(x)]$;
7. C$\vee$ $\forall x B(x) \equiv \forall x [C \vee B(x)]$;
8. C$\rightarrow$ $\forall x B(x) \equiv \forall x [C \rightarrow B(x)]$;
9. $\forall x [B(x) \rightarrow C] \equiv \exists x B(x) \rightarrow C$;
10. $\exists x [A(x) \vee B(x) \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)]$;
11. $\exists x [C \vee B(x)] \equiv C \vee \exists B(x)$;
12. $\exists x [B(x) \rightarrow C] \equiv \forall x B(x) \rightarrow C$.

Справедливость первых двух равносильностей очевидна. Первая означает, что если не верно, что для любого x истинно A(x), значит, найдется такое x, что A(x) – не истина. Аналогичные рассуждения доказывают справедливость и второй равносильности. Равносильности 1 и 2 широко используются при преобразованиях с выражениями, содержащими отрицания.

Пример: Найти отрицание формул

1. $\forall x P(x) \& Q(x))$;
2. $\exists x P(x) \vee Q(x))$;
3. $\forall x \exists y \big(R(x, y) \rightarrow L(x, y)\big)$.

Решение

1. $\overline{\forall x \big(P(x) \& Q(x)\big)} \equiv \exists x \overline{\big(P(x) \& Q(x)\big)} \equiv \exists x (\overline{P(x) \vee \overline{Q(x)})}$;

2. $\overline{\exists x(P(x) \vee Q(x))} \equiv \forall x(\overline{P(x) \vee Q(x)}) \equiv \forall x(\overline{P(x)} \,\&\, \overline{Q(x)})$;

3. $\overline{\forall x \exists y\big(R(x,y) \to L(x,y)\big)} = \exists x \overline{\exists y\big(R(x,y) \to L(x,y)\big)} =$

$= \exists x \forall y \overline{(\overline{R(x,y)} \vee L(x,y))} = \exists x \forall y (R(x,y) \& \overline{L(x,y)})$.

Докажем справедливость какой-либо из остальных равносильностей, например, равносильности 10: ∃x(A(x)vB(x))≡∃xA(x)v∃xB(x).

Для доказательства достаточно рассмотреть два случая:

1. Пусть A(x) и B(x) – тождественно ложны. Тогда будет тождественно ложным предикат A(x)vB(x) и будут ложными высказывания ∃xA(x)v∃xB(x), ∃x(A(x)vB(x)).

2. Пусть теперь хотя бы один из предикатов не тождественно ложный, например, A(x). Тогда не будет тождественно ложным предикат A(x)vB(x), и будут истинными высказывания ∃xA(x), ∃x(A(x)vB(x)), а значит истинны и исходные формулы.

Аналогичным образом доказываются и остальные равносильности.

Отметим, что формула ∀x[A(x) v B(x)] не равносильна формуле ∀xA(x) v ∀xB(x), а формула

∃x[A(x)Λ B(x)] не равносильна формуле ∃xA(x)Λ ∃xB(x) . Однако, справедливы равносильности:

$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) = \forall x A(x) \vee \forall y B(y) = \forall x\big(A(x) \vee \forall y B(y)\big)$$
$$= \forall x \forall y\big(A(x) \vee B(y)\big),$$
$$\exists x A(x) \& \exists x B(x) = \exists x A(x) \& \exists y B(y) = \exists x\big(A(x) \& \exists y B(y)\big)$$
$$= \exists x \exists y\big(A(x) \& B(y)\big).$$

Рассмотрим еще примеры применения равносильных преобразований.

На множестве M определены предикаты A(x) и B(x). Доказать, что высказывание ∀xA(x) ложно, если истинно высказывание $\exists x(A(x) \to (\overline{A(x)} \vee \overline{(\overline{B(x)} \to A(x))}))$.

Преобразуем формулу:

$$\exists x(A(x) \to (\overline{A(x)} \vee (\overline{\overline{B(x)} \to A(x)}))) \equiv \exists x(\overline{A(x)} \vee \overline{A(x)} \vee (\overline{B(x) \vee A(x)})) \equiv$$
$$\equiv \exists x(\overline{A(x)} \vee (\overline{B(x) \vee A(x)})) \equiv \exists x(\overline{A(x)(B(x) \vee A(x)}) \equiv \exists x\overline{A(x)} \equiv \overline{\forall x A(x)} = 1,$$

значит, $\forall x A(x)=0$.

Каким условиям удовлетворяют области истинности предикатов A(x) и B(x), определенных на множестве M, если истинно высказывание: $\overline{\exists x A(x)B(x)}(\forall x(A(x) \to B(x))$.

$$\overline{\exists x A(x)B(x)}(\forall x(A(x) \to B(x)) \equiv \forall x(\overline{A(x)} \vee \overline{B(x)})(\forall x(\overline{A(x)} \vee B(x)) \equiv$$
$$\forall x((\overline{A(x)} \vee \overline{B(x)})(\overline{A(x)} \vee B(x)) \equiv \forall x\overline{A(x)} \equiv \overline{\exists x A(x)} = 1,$$

тогда $\exists x A(x)=0$, значит, $I_A = \varnothing$, I_B – любое подмножество области определения M.

Практическая часть

Практическая работа № 9 «Логические операции над предикатами»

Задание к работе:

1. Для следующих предложений выделить предикаты и для каждого из них указать область истинности, если область определения для одноместного M=R, для двухместного $M=R^2$:

1) $x+5=1$;
2) при $x=2$ выполняется равенство $x^2 - 1 = 0$;
3) существует такое число x, что $x^2 - 2x + 1 = 0$;
4) $x^2 - 2x + 1 = 0$;
5) $x+2<3x - 4$;
6) однозначное число x кратно 3;
7) $(x+2)-(3x-4)$;
8) $x^2 + y^2 > 0$.

2. Какие из предикатов тождественно истинны?

a. $x^2 + y^2 \geq 0$;
b. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;
c. $x^2 + 1 \geq (x+1)^2$;
d. $x^2 + y^2 > 0$;
e. $(x+1)^2 > x-1$.

3. Найти области истинности предикатов, если $x \in R$:

1) $\sqrt{x-6} = 2$;

2) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$;

3) $\begin{cases} x^2 - 13x + 40 \geq 0; \\ 2x^2 + x - 30 < 0. \end{cases}$

4. Изобразить на декартовой плоскости области истинности предикатов:

1) $x+y=1$;

2) x+3y=3;

3) sinx=siny;

4) $(x-2)^2+(y+3)^2=0$;

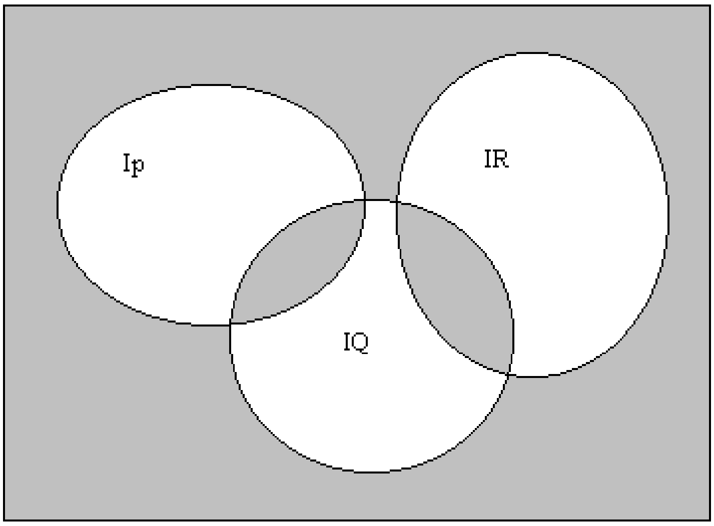
5) $(x-2)^2+(y+3)^2\le 4$;

6) ((x>2)v(y>1))((x<-1)v(y<-2)).

5.На множестве M = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} заданы предикаты A(x): «x не делится на 5», B(x): «x – четное число», C(x): «x кратно 3». Найти множество истинности предиката: A(x)VB(x)→C(x).

6. Изобразить на диаграмме Эйлера -Венна область истинности предиката: (P(x)→Q(x))VR(x)$\overline{Q}(x)$.

7. Записать предикат, полученный в результате логических операций над предикатами P(x), Q(x), R(x):



9. Будут ли предикаты равносильны, или один является следствием другого?

$$1)\sin^2 x+\cos^2 x=1; tg^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x};$$

$$2)x+y=z; (x+y)(x-z)=-zy;$$

$$3)x^3+y^3=0; x^2-y^2=0.$$

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.

2. Выполнить задание.

3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Структура простого высказывания.
2. Определение одноместного предиката.
3. Область истинности одноместного предиката.
4. Определение тождественно истинного (тождественно ложного) предиката.
5. Определение двухместного предиката.
6. Определение n – местного предиката.
7. Какие предикаты являются равносильными? В каком случае предикат P(x) является следствием предиката Q(x)?
8. Перечислить логические операции над предикатами и показать области истинности на диаграммах Эйлера- Венна.

Третьяк Ирина Юрьевна

Практическая работа № 10 «Кванторные операции»

Цель: *научиться ориентироваться в кваторах и выполнять над ними операции.*

Задание к работе:

1. Какие из следующих выражений являются формулами? В каждой формуле выделить свободные и связанные переменные:

2) $\exists x \exists y\, P(x,y)$;
3) $\exists x, y\, P(x,y)$;
4) $\forall x P(x) \vee \forall y Q(x,y)$;
5) $\forall x \exists y\, P(x,y)$;
6) $p \to \forall x\, P(x,y)$;
7) $\exists x\, P(x,y) \& Q(y,z)$;

2. Даны утверждения A(n):«число *n* делится на 3», B(n): «число *n* делится на 2», C(n): «число *n* делится на 4», D(n): «число *n* делится на 6», E(n): «число *n* делится на 12». Укажите, какие из следующих утверждений истинны, какие ложны:

1. $\forall n\big(A(n) \& B(n) \to E(n)\big)$;
2. $\forall n\big(B(n) \& D(n) \to E(n)\big)$;
3. $\exists n\big(C(n) \& D(n) \to E(n)\big)$;
4. $\forall n\big(E(n) \to C(n) \& D(n)\big)$;
5. $\forall n\ \left(\overline{E(n)} \to B(n)D(n)\right)$;

3. Доказать равносильности:

8) $\forall x(A(x) \to c) \equiv \exists x A(x) \to c$;

9) $\exists x A(x) \exists y B(y) \equiv \exists x \exists y (A(x)B(x))$.

4. Каким условиям удовлетворяют области истинности предикатов A(x) и B(x), определенных на множестве M, если истинно высказывание: $\exists x(A(x)B(x)) \to (\forall x(A(x) \to B(x)))$.

5. Предикаты A(x, y) и B(y, z) определены на множестве MxM, где M={a, b, c}. Записать формулу $\exists x\exists yA(x, y)\rightarrow\exists y\forall xB(x, y)$ без кванторных операций.

6. Дан предикат Q(x,y): «x делится на y». Какие из предикатов тождественно истинные и какие тождественно ложные: $\forall xQ(x,y)$, $\exists yQ(x,y)$, $\forall yQ(x,y)$, $\exists xQ(x,y)$. Найти значения высказываний: $\exists x\exists yQ(x,y)$: $\forall y\exists xQ(x,y)$: $\exists y\forall xQ(x,y)$: $\forall x\forall yQ(x,y)$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Как одноместный предикат можно превратить в единичное высказывание?
2. Что понимают под выражением $\forall xP(x)$?
3. Что понимают под выражением $\exists xP(x)$?
4. Каким образом двухместный предикат превратить в одноместный и - в высказывание?
5. Какой символикой можно пользоваться в логике предикатов?
6. Сформулировать определение формулы логики предикатов.
7. От чего зависит значение формулы логики предикатов?
8. Сформулировать оба определения равносильных формул логики предикатов.
9. Какие равносильности используются при построении отрицаний формул?

10. Закончите равносильности:

1) $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \equiv \ldots$;

2) $\exists x(A(x) \vee B(x)) \equiv \ldots$;

3) $C \vee \forall x(B(x)) \equiv \ldots$;

4) $C \wedge \forall x\,(B(x)) \equiv \ldots$;

5) $C \rightarrow \forall x(B(x)) \equiv \ldots$;

Библиографический список

Основные источники:

1. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. – М.: Издательский центр «Академия», 2008.
2. Спирин М.С., Спирина П.А. Дискретная математика. – М.: Издательский центр «Академия», 2010.
3. Канцедал, С.А. Дискретная математика – М.: ИД ФОРУМ, НИЦ ИНФРА-М, 2013.
4. Клини С. Математическая логика. – М.: Издательство ЛКИ, 2008.
5. Игошин В.И. Задачник-практикум по математической логике. – М.: Издательский центр “Академия”, 2007.
6. Шапорев С.Д. Математическая логика. Курс лекций и практических занятий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.

Дополнительные источники:

1. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Введение в математическую логику. – М.: , 1982.
2. Кондаков Н.И. Логический словарь-справочник. – М.: , 1975.
3. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
4. Лихтарников Л.М. Сукачёва Т.Г. Математическая логика. – СПб.: Лань, 1999.
5. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1976.